C U P R I N S

P r e f a ț ă

Fondată, în esență, de David Hilbert, Stefan Banach şi Laurent Schwartz, *Analiza funcțională* a apărut ca instrument de lucru în studiul spațiilor de funcții şi al unor probleme ce intervin în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. Astfel, au prezentat interes unele teoreme de existență a soluției pentru anumite probleme concrete, teoreme pe care *Analiza funcțională* le-a rezolvat într-un cadru abstract, general. Ulterior, dezvoltarea internă a *Analizei funcționale* a impulsionat decisiv dezvoltarea a numeroase domenii precum sunt: mecanica teoretică, fizica, teoria probabilităților, matematicile economice, analiza numerică, calculul variațional ş.a.

Dacă *Analiza matematică* are ca obiecte de studiu: şirul, funcția ş.a. arătând, spre exemplu, că *orice şir monoton şi mărginit este convergent* sau *orice funcție continuă este integrabilă Riemann, Analiza funcțională* are ca obiecte de studiu spațiile de funcții sau spații abstracte înzestrare cu structuri algebrice, stucturi de ordine sau/şi structuri topologice,

precum şi aplicaţii sau spaţii de aplicaţii între asemenea structuri.

Metodele de investigare sunt specifice şi, pentru a crea o imagine despre cum se lucrează în *Analiza funcţională*, menţionăm că, spre exemplu, uneori, pentru a arăta că avem A=B când $A \subset B$, se arată că A are suficiente proprietăţi pentru a coincide cu B.

Studiul *Analizei funcţionale* nu se poate face fără cunoştinţe de algebră liniară, analiză matematică reală sau complexă, teoria măsurii şi, în special, fără o bună cunoaştere a topologiei în spaţii metrice.

Cursul de *Analiză funcţională* se adresează studenţilor de la facultăţile de matematică, precum şi tuturor celor interesaţi de aplicaţiile *Analizei funcţionale* în domeniile menţionate.

Acest curs a fost predat, într-o formă puţin diferită de cea prezentă, studenţilor de la facultăţile de matematică ale Universităţii Bucureşti şi Universităţii *Spiru Haret*.

25 mai 2007

Gheorghe GRIGORE

Dumitru D. DRĂGHIA

Listă de notații

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$;

$\mathbb{N}^*=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale;

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale;

$\mathbb{C}$ – mulțimea numerelor complexe;

$\mathbb{K}$ – corpul scalarilor, $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$;

$\varnothing$ – mulțimea vidă;

$\overline{A}$ – aderența (închiderea) mulțimii A;

$\operatorname{Int} A$ – interiorul mulțimii A;

$\operatorname{Sp} A$ – subspațiul generat de mulțimea A;

$\operatorname{Ker} f$ – nucleul aplicației f;

$\dim X$ – dimensiunea spațiului X;

$\mathrm{d}(x,y)$ – distanța de la x la y;

$\delta(A)$ – diametrul mulțimii A;

$\|x\|$ – norma elementului x;

$\mathcal{L}(X,Y)$ – mulțimea operatorilor liniari şi continui între spațiile liniare normate X şi Y;

$\mathcal{L}(X)$ – mulțimea operatorilor liniari şi continui de la spațiul liniar normat X în el însuşi;

X' sau X^* – dualul (conjugatul) spațiului liniar normat X;

$\mathcal{K}(X,Y)$ – mulțimea operatorilor liniari compacți de la X la Y;

$\boldsymbol{S}(U)$ – spectrul operatorului liniar U;

$\boldsymbol{Sp}(U)$ – spectrul punctual al operatorului liniar U;

$\langle x, y\rangle$ – produsul scalar al elementelor x şi y ;

$x \perp y$ – x este ortogonal pe y ;

$x \perp A$ – x este ortogonal pe mulțime A;

$A^{\perp}$ – complementul ortogonal al mulțimii A;

$A \perp B$ – mulțimea A este ortogonală pe mulțimea B;

U^* – adjunctul operatorului liniar şi continuu U;

$\mathrm{Inv}(A)$ – mulțimea elementelor inversabile din algebra A;

$\sigma(x)$ – spectrul elementului x dintr-o algebră;

$R_x(\lambda)$ – funcția rezolventă a elementului x dintr-o algebră. ▪

1

SPAȚII LINIARE. OPERATORI LINIARI

În acest capitol reamintim câteva noțiuni elementare de algebră liniară.

Fie $\mathbb{R}$ corpul numerelor reale şi $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe. Notăm prin $\mathbb{K}$ unul din corpurile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

1.1. Spații liniare

Definiție. Fie *X* o mulțime (nevidă) înzestrată cu două operații, *operația de adunare,* notată "$+$", care aplică fiecare pereche (x, y) din $X \times X$ în $x + y$ din X şi *operația de înmulțire cu scalari*, notată cu un punct "$\cdot$", care aplică fiecare pereche (c, x) din $\mathbb{K} \times X$ în $c \cdot x$ din *X*.

Mulțimea *X* este numită *spațiu liniar* (sau *spațiu vectorial*) peste corpul $\mathbb{K}$ dacă operațiile de adunare şi înmulțire cu scalari satisfac următoarele axiome, pentru toate elementele *x,y* şi *z* din *X* şi toți scalarii c, c_1 şi c_2 din $\mathbb{K}$:

1) $x + y = y + x$ (comutativitatea adunării);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitatea adunării);

3) există un element unic 0 ("zero") în X astfel încât $x + 0 = x$ (există un *element neutru* unic față de adunare);

4) pentru fiecare x există un vector unic $-x$ în X astfel încât $x+(-x)=0$ (există un *element opus* unic pentru fiecare element din X);

5) $1\cdot x = x$;

6) $(c_1c_2)\cdot x = c_1\cdot(c_2\cdot x)$;

7) $c\cdot(x+y)=c\cdot x + c\cdot y$ (distributivitatea înmulțirii cu scalari față de adunare);

8) $(c_1+c_2)\cdot x = c_1\cdot x + c_2\cdot x$.

Elementele spațiului liniar X sunt numite *vectori* sau *puncte*. Elementele corpului $\mathbb{K}$ sunt numite *scalari*. Astfel, un scalar este un număr real sau un număr complex.

Un spațiu liniar (liniar) peste corpul numerelor reale este numit *spațiu liniar real* .

Un spațiu liniar (liniar) peste corpul numerelor complexe este numit *spațiu liniar complex* .

Este uşor de verificat că spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$ este spațiu liniar real. Însă, noțiunea de spațiu liniar este mult mai generală. De exemplu, mulțimea tuturor funcțiilor continue pe $\mathbb{R}$ cu adunarea punctuală şi înmulțirea cu scalari este spațiu liniar real.

Elementul $x+(-y)$ îl vom nota $x-y$. Vom suprima simbolul ("$\cdot$") pentru înmulțirea cu scalari, întrucât nu este necesar.

Definiție. O submulțime nevidă X_0 a unui spațiu liniar X se numeşte *subspațiu liniar* al lui X dacă îndeplineşte următoarele condiții:

1) $x+y\in X_0$, pentru oricare $x,y\in X_0$;

2) $cx \in X_0$, pentru oricare $x \in X_0$ şi oricare scalar c.

Astfel, un subspațiu liniar X_0 al unui spațiu liniar X este închis față de combinațiile liniare, adică oricare combinație liniară de elemente din X_0 este un element al lui X_0.

Nu este greu de verificat că un subspațiu liniar al unui spațiu liniar este el însuşi spațiu liniar. În particular, oricare subspațiu liniar conține vectorul nul 0.

Definiție. O submulțime finită $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ a unui spațiu liniar X se numeşte *liniar independentă* dacă:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = 0,\ c_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Definiție. O submulțime B a unui spațiu liniar X se numeşte *liniar independentă* dacă oricare submulțime finită A a lui B este liniar independentă.

Definiție. O submulțime B a unui spațiu liniar X se numeşte *<u>bază (algebrică)</u>* dacă B este liniar independentă şi dacă pentru fiecare $x \in X$, există $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$ şi $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \cdots, \mathrm{c}_\mathrm{n} \in \mathbb{K}$, astfel încât $x = \sum_{k=1}^{n} c_k b_k$.

Prin lema lui Zorn rezultă că *oricare spațiu liniar are o bază algebrică.*

Toate bazele algebrice ale unui spațiu liniar au acelaşi cardinal; acest cardinal este numit *dimensiunea spațiului liniar*.

Dacă un spațiu liniar are o bază de dimensiune finită se numeşte *finit-dimensional*, altfel se numeşte *infinit-dimensional*.

Fie X_0 un subspațiu liniar al unui spațiu liniar X. Definim pe X o relație: $x \sim y$ dacă şi numai dacă $x - y \in X_0$. Această relație este o relație de echivalență.

Pentru fiecare $x \in X$, definim clasa de echivalență $\hat{x} = \{y \in X : y - x \in X_0\} = \{x + x' : x' \in X_0\}$. Oricare $y \in \hat{x}$ este un reprezentant al clasei $\hat{x}$ şi $y \in \hat{x}$ dacă şi numai dacă $x \in \hat{y}$ dacă şi numai dacă $\hat{x} = \hat{y}$. Mulțimea cât $X / X_0 = \{\hat{x} : x \in X\}$, cu operațiile de adunare şi înmulțire cu scalari definite prin $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ şi $c\hat{x} = \widehat{cx}$, este un spațiu liniar, numit *spațiu liniar cât* al spațiului liniar X în raport cu subspațiul liniar X_0.

1.2. Operatori liniari

Fie X şi Y spații liniare peste acelaşi corp $\mathbb{K}$.

Definiție. O aplicație $T : X \to Y$ se numeşte *operator liniar* dacă este *aditiv* ($T(x+y) = T(x) + T(y)$, $\forall\ x, y \in X$) şi *omogen* ($T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$).

Un operator liniar de la X la $\mathbb{K}$ se numeşte *funcțională liniară*.

Mulțimea tuturor operatorilor liniari de la X la Y, cu operațiile de adunare şi înmulțire cu scalari este spațiu liniar peste $\mathbb{K}$.

Acest spațiu liniar este numit *spațiul operatorilor liniari de la X la Y.* □ ▪

2

S P A Ț I I   M E T R I C E

În acest capitol prezentăm câteva noțiunui și rezultate esențiale ale teoriei spațiilor metrice care vor fi folosite în capitolul privind spațiile liniare normate.

2.1. Spații metrice. Proprietăți de bază

Definiție. Fie X o mulțime nevidă. O funcție $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se numeşte *distanță* pe X (sau *metrică*), dacă verifică următoarele axiome:

i) $d(x,y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x, y \in X$;

iii) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

(Axioma (iii) este numită *axioma triunghiului*).

Mulțimea X împreună cu o metrică d definită pe X se numeşte *spațiu metric* şi se notează (X,d).

Observații.

1) Din axioma triunghiului rezultă $d(x,x) \ge 0$ $(x \in X)$.

Prin inducție, rezultă că $d(x_1, x_n) \le \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$,

pentru oricare $n = 2, 3, 4, \cdots$ şi $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$.

2) Distanța d are proprietatea următoare:

$$\left|d(x',y)-d(x,y)\right| \le d(x',x) \quad (x,x',y \in X).$$

Exemple.

1) Oricare mulțime X devine spațiu metric dacă se defineşte distanța pe X prin:

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x \ne y,\\ 0, & x = y,\end{cases} \quad (x,y \in X).$$

Acest spațiu se numeşte *spațiu metric discret*.

2) Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale cu distanța definită de:

$$d(x,y)=|x-y| \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

este spațiu metric, numit *dreapta reală*.

3) Planul real $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, cu metrica definită prin:

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,$$

pentru oricare $x=(x_1,x_2)$ şi $y=(y_1,y_2)$, este spațiu metric.

4) Spațiul n-dimensional $\mathbb{R}^n$, cu metrica euclidiană definită prin:

$$d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2},$$

unde $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$, devine spațiu metric. Acest spațiu este numit *spațiul euclidian real cu n dimensiuni*. În acest caz, axioma triunghiului se verifică folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}x_k{}^2\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k{}^2.$$

5) Spațiul $\mathbb{R}^n$ devine spațiu metric cu distanța definită de:

$$d(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|.$$

6) Mulțimea $C([0,1])$ a tuturor funcțiilor continue reale, definite pe $[0,1]$, cu metrica definită prin:

$$d(f,g)=\sup_{t\in[0,1]}\left|f(t)-g(t)\right|,$$

pentru oricare $f,g\in C([0,1])$, este spațiu metric.

Spațiul metric astfel construit se numeşte *spațiul funcțiilor continue reale pe* $[0,1]$.

7) Mulțimea tuturor şirurilor de numere reale $x=(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty$, cu metrica definită de:

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\right)^{1/2},$$

unde $x=(x_n)_{n\geq 1}$ şi $y=(y_n)_{n\geq 1}$, este spațiu metric.

Acest spațiu metric se notează ℓ^2.

8) Mulțimea tuturor şirurilor de numere reale $x=(x_n)_{n\geq 1}$ cu distanța definită de:

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|},$$

unde $x=(x_n)_{n\geq 1}$ şi $y=(y_n)_{n\geq 1}$, este spațiu metric.

În teoria spațiilor metrice este convenabilă folosirea limbajului din geometria clasică. De exemplu, elementele unui spațiu metric vor fi numite *puncte*.

Definiție. Fie (X,d) un spațiu metric, $x_0\in X$ şi $r>0$.

Mulțimea $B(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)<r\}$ se numeşte *<u>bilă deschisă</u> cu centrul* x_0 *şi de rază* r.

Mulțimea $B^{*}(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)\le r\}$ se numeşte <u>*bilă închisă*</u> *cu centrul* x_0 *şi de rază* r.

Mulțimea $S(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)=r\}$ se numeşte <u>*sferă*</u> *cu centrul* x_0 *şi de rază* r.

Observație. Pe dreapta reală, bila deschisă cu centrul x_0 şi de rază r este *intervalul simetric* (x_0-r,x_0+r); bila închisă cu centrul x_0 şi de rază r este *intervalul închis* (= *segmentul*) *simetric* $[x_0-r,x_0+r]$; sfera cu centrul x_0 şi de rază r este o mulțime formată din două puncte: $\{\ x_0-r,x_0+r\ \}$.

Definiție. Fie (X,d) un spațiu metric şi $E\subset X, F\subset X$ submulțimi nevide. *Distanța de la mulțimea* E *la mulțimea* F este definită prin $d(E,F)=\inf\{d(x,y): x\in E, y\in F\}$.

Distanța de la un punct $x\in X$ *la o submulțime nevidă* A *a lui* X este definită prin $d(x,A)=\inf\{d(x,a): a\in A\}$.

Observații.

1) Dacă $E\cap F\ne\varnothing$, atunci $d(E,F)=0$.

2) $d(E,F)=\inf\{d(x,F): x\in E\}$.

3) Dacă $d(E,F)=\alpha$, <u>nu</u> rezultă că există $x\in E$ şi $y\in F$, astfel încât $d(x,y)=\alpha$.

4) Dacă $x\notin B(x_0,r)$, atunci $d(x,B(x_0,r))>d(x_0,x)-r$.

5) Dacă $E\subset X$, $x,y\in X$, atunci

$$|d(x,E)-d(y,E)|\le d(x,y).$$

Definiție. Fie (X,d) un spațiu metric şi E o submulțime nevidă a lui X. Atunci $\delta(E)=\sup\{d(x,y): x,y\in E\}$ se numeşte *diametrul mulțimi* E.

Observație. $\delta(E)\in\overline{\mathbb{R}}$; $\delta\left(B^{*}(x_0,r)\right)=2r$.

Definiție. O submulțime nevidă B a unui spațiu metric (X,d) se numeşte *mărginită* dacă $\delta(B)<\infty$.

Definiție. O submulțime nevidă G a unui spațiu metric (X,d) se numeşte *deschisă* dacă pentru oricare $x\in G$, există $r>0$ astfel încât $B(x,r)\subset G$.

Exemple.

1) Mulțimea vidă $\varnothing$ şi spațiul X sunt mulțimi deschise.
2) Într-un spațiu metric discret, oricare mulțime este deschisă.

Propoziție. *Orice bilă deschisă dintr-un spațiu metric* (X,d) *este mulțime deschisă.*

Demonstrație. Fie $B(x_0,r)=\{x\in X: d(x_0,x)<r\}$, $x\in B(x_0,r)$, $x\neq x_0$, $0<r'<r-d(x_0,x)$ şi $y\in B(x,r')$. Atunci $d(x_0,y)\le d(x_0,x)+d(x,y)<r$, adică $y\in B(x_0,r)$.

Deci, $B(x,r')\subset B(x_0,r)$. □

Propoziție. *Reuniunea oricărei familii* $\{G_i\}_{i\in I}$ *de mulțimi deschise este deschisă.*

Demonstrație. Dacă $x \in \bigcup_{i\in I} G_i$, atunci există $i_0 \in I$ astfel încât $x \in G_{i_0}$. Din $x \in G_{i_0}$ rezultă că există $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset G_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. □

Exemplu. În $\mathbb{R}$, oricare interval (a,∞) este deschis, deoarece $(a,\infty) = \bigcup_{x>a} (a,x)$.

Observație. Intersecția unui număr finit de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Definiție. Fie $x \in (X,d)$. Se numeşte *vecinătate a punctului* x, oricare mulțime $V \subset X$ care conține o mulțime deschisă $G \subset X$ care conține pe x (adică, $x \in G \subset V$).

Observație. Oricare bilă deschisă $B(x,r)$ este o vecinătate a lui x.

Teorema 1. *Oricare spațiu metric* (X,d) *este spațiu separat, adică verifică* *<u>axioma lui Hausdorff</u>* *(pentru orice* $x, y \in X$*, există două vecinătăți* V_x*,* V_y *ale acestor puncte cu proprietatea* $V_x \cap V_y = \varnothing$*).*

Demonstrație. Fie $x, y \in X$, $x \neq y$ şi $0 < \varepsilon < d(x,y)/2$. Atunci $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \varnothing$. □

Definiție. Un punct x se numeşte *punct interior pentru mulțimea* E a unui spațiu metric, dacă E este vecinătate a lui x.

Mulțimea tuturor punctelor interioare unei mulțimi E se numeşte *interiorul mulțimii* E şi se notează $\operatorname{Int} E$.

Observație importantă. *O mulțime* G *este deschisă dacă şi numai dacă* $G = \operatorname{Int} G$.

Definiție. Se numeşte *punct aderent unei mulțimi* F, un punct $x \in X$ cu proprietatea că fiecare vecinătate V a lui x are intersecția nevidă cu F (adică, $V \cap F \neq \varnothing$).

Muțimea tuturor punctelor aderente mulțimii F se numeşte *închiderea mulțimii* F şi se notează $\overline{F}$.

Definiție. Un punct x se numeşte *punct de acumulare* pentru mulțimea A dacă pentru fiecare vecinătate V a lui x avem $V \cap \left(A \setminus \{x\}\right) \neq \varnothing$.

Observație. Orice punct de acumulare pentru A este aderent mulțimii A.

Definiție. O mulțime F se numeşte *închisă* dacă $F = \overline{F}$.

Definiție. Un punct $x \in X$ se numeşte *punct frontieră pentru mulțimea* A a unui spațiu metric, dacă x este punct aderent mulțimii A cât şi mulțimii $X \setminus A$.

Mulțimea tuturor punctelor frontieră ale mulțimii A se numeşte *frontiera mulțimii* A şi se notează $\operatorname{Fr} A$.

Definiție. O mulțime A se numeşte *densă în* X (= *densă peste tot*) dacă $\overline{A} = X$.

O mulțime A se numeşte *rară* (= *nicăieri densă*) dacă şi numai dacă $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing$.

O mulțime A se numeşte *slabă* (= *de prima categorie Baire*) dacă este o reuniune numărabilă de mulțimi rare.

O mulțime care nu este de prima categoria Baire se numeşte *de categoria a doua Baire*.

Observație. $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$.

Definiție. Un spațiu metric X se numeşte *separabil* dacă există în X o mulțime A cel mult numărabilă şi densă în X.

Exemplu. Dreapta reală $\mathbb{R}$ este spațiu separabil deoarece $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ şi $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

2.2. Limite. Continuitate

Definiție. Fie un spațiu metric (X, d). Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din X se numeşte *convergent* dacă există $a \in X$, cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, asfel încât $n \geq n_\varepsilon$ implică $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Elementul a se numeşte *limita şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Observație. Într-un spațiu metric (X, d), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ înseamnă $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.

Propoziție. *Limita unui şir convergent dintr-un spațiu metric este unică.*

Justificare. Fie $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ şi $b = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Atunci $0 \le d(a,b) \le d(a,x_n) + d(x_n,b) \to 0$. Deci $d(a,b) = 0$, de unde rezultă că $a = b$. □

Definiție. Fie (X,d) un spațiu metric. Un şir $(x_n)_{n\ge1}$ de elemente din X se numeşte *fundamental,* sau *şir Cauchy,* dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, dacă $n,m \ge n_\varepsilon$, atunci $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Observație. Se verifică uşor că *orice şir convergent este fundamental*. Reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

Propoziție. *Pentru ca un punct x să fie aderent mulțimii A este necesar şi suficient să existe în mulțimea A un şir $(x_n)_{n\ge1}$ convergent către x.*

Justificare. Într-adevăr, dacă $x \in \overline{A}$, atunci avem $B(x,1/n) \cap A \ne \varnothing$, $n \ge 1$. Există atunci $x_m \in A \cap B(x,1/n)$, deci $d(x_m, x) < 1/n$ şi prin urmare $\lim\limits_{n \to \infty} x_m = x$.

Reciproc, dacă în mulțimea A există un şir $(x_n)_n$ convergent către *x*, atunci, pentru orice vecinătate *V* a lui *x*, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V$ pentru orice $n \ge n_0$.

Atunci $V \cap A \ne \varnothing$ şi deci $x \in \overline{A}$. □

Definiție. Fie (X,d) şi (Y,d') spații metrice, $A \subset X$ şi $a \in \overline{A}$ un punct de acumulare pentru *A*. O aplicație $f : A \to Y$ *are limită* în punctul a dacă există $a' \in Y$ astfel încât pentru

oricare şir de puncte $(x_n)_{n\geq 1}$ din A cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a'$.

Fie (X,d) şi (Y,d') spații metrice, fie $x_0 \in X$.

Următoarele afirmații sunt echivalente şi oricare dintre ele poate fi luată ca definiție a continuității unei aplicații $f : X \to Y$ într-un punct.

1) *Aplicația $f : X \to Y$ este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă pentru fiecare vecinătate V a lui $f(x_0)$ în Y, există o vecinătate U a lui x_0 în X astfel încât $f(U) \subset V$.*

2) *Aplicația $f : X \to Y$ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru fiecare vecinătate V a lui $f(x_0)$ în Y, $f^{-1}(V)$ este o vecinătate a lui x_0 în X.*

3) *Aplicația $f : X \to Y$ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât $d(x_0, x) < \delta$ implică $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.*

4) *Aplicația $f : X \to Y$ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru oricare şir $(x_n)_n \subset X$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Aplicația $f : X \to Y$ este *continuă* pe X (sau simplu *continuă*) dacă este continuă în fiecare punct al lui X.

Teorema 2. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

i) f este continuă;

ii) $f^{-1}(G)$ *este mulțime deschisă în* X *, pentru oricare mulțime deschisă* G *din* Y *;*

iii) $f^{-1}(F)$ *este mulțime închisă în* X *, pentru oricare mulțime închisă* F *din* Y *;*

iv) $f\left(\overline{A}\right)\subset\overline{f(A)}$*, pentru fiecare mulțime* A *din* X *.*

Demonstrație. Demonstrăm echivalențele astfel:

(i) $\Rightarrow$ *(iv)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(i).*

(i) $\Rightarrow$ *(iv)*: Dacă $x_0 \in X$ este punct aderent unei mulțimi $A \subset X$ şi V este o vecinătate a lui $f(x_0)$ în Y, atunci $f^{-1}(V)$ este vecinătate a lui x_0 în X, deci există $y \in A \cap f^{-1}(V)$ şi, prin urmare, $f(y)\in f(A)\cap V$. Aceasta arată că $f(x_0)\in\overline{f(A)}$.

(iv) $\Rightarrow$ *(iii)*: Dacă F' este închisă şi $F = f^{-1}(F')$, atunci $f\left(\overline{F}\right)\subset\overline{f(F)}\subset\overline{F'}=F'$, adică $\overline{F}\subset f^{-1}(F')=F$. Deci $F=\overline{F}$.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*: Rezultă din definiție.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Dacă $x_0 \in X$ şi V este o vecinătate a lui $f(x_0)$, atunci există o vecinătate deschisă $W \subset V$ a lui $f(x_0)$. Mulțimea $f^{-1}(W)$ este deschisă şi $x_0 \in f^{-1}(W)\subset f^{-1}(V)$, deci f este continuă în fiecare $x_0 \in X$. □

Observație importantă. Imaginea directă a unei mulțimi deschise/închise printr-o aplicație continuă nu este în general mulțime deschisă/închisă. De exemplu, aplicația $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ este continuă în $\mathbb{R}$, dar $f((-1,1))=[0,1)$ nu este mulțime deschisă.

Definiție. Fie $A \subset X$. O aplicație $f : A \to Y$ se numeşte *uniform continuă pe* A dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât $x, y \in A$ şi $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definiție. O aplicație $f : X \to Y$ se numeşte *izometrie* dacă $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

Observații.

1) O aplicație uniform continuă este continuă.
2) Oricare izometrie este uniform continuă.

Definiție. Fie (X, d) şi (Y, d') spații metrice. O aplicație $f : X \to Y$ se numeşte *homeomorfism al lui* X *pe* Y dacă f este bijectivă şi dacă f şi f^{-1} sunt continue.

Spațiile X şi Y se numesc atunci *homeomorfe*.

Observații.

1) Dacă $f : X \to Y$ este un homeomorfism al lui X pe Y, atunci $f^{-1} : Y \to X$ este un homeomorfism al lui Y pe X.
2) Un homeomorfism poate să nu fie uniform continuu.
3) Oricare izometrie este homeomorfism.

2.3. Spații metrice complete

Scopul acestui paragraf este de a prezenta în esență teorema lui Baire.

Modelele de spații complete vor fi date de spațiile Banach ale Analizei funcționale.

Fie (X,d) un spațiu metric. Amintim că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$, se numeşte *fundamental* sau *şir Cauchy* dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n,m \geq n_0$ să avem $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Se verifică uşor că *orice şir convergent este fundamental*.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată, existând spații metrice în care unele şiruri Cauchy nu sunt convergente (vezi, de exemplu, mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale organizată ca spațiu metric cu distanța generată de modul).

Definiție. Un spațiu metric se numeşte *complet* dacă orice şir Cauchy în acest spațiu este convergent.

Observație. Ştim că orice şir Cauchy de numere reale (sau complexe) este convergent, deci mulțimea $\mathbb{R}$ (respectiv $\mathbb{C}$) este spațiu metric complet în raport cu metrica generată de modul.

De asemenea, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$ cu distanța euclidiană sunt spații metrice complete.

Observații.

1) Mulțimea A este *rară* dacă şi numai dacă $\overline{\left(X \setminus \overline{A}\right)} = X$.

2) O mulțime închisă este rară dacă şi numai dacă interiorul ei este mulțimea vidă.

3) În mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, orice mulțime finită este rară, mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sunt rare. Mulțimea $\mathbb{Q}$ nu este rară.

4) În $\mathbb{R}^m$ orice subspațiu liniar propriu este mulțime rară.

5) Mulțimea închisă A este rară dacă şi numai dacă $\overline{X \setminus A} = X$. Afirmația rezultă din $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{Int} A$.

Definiție. Un spațiu metric X se numeşte d*e categoria I Baire* dacă este o mulțime de *prima categorie Baire*, adică dacă $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, unde mulțimea X_n este rară. În caz contrar, se spune că X este de *categoria a doua Baire*.

Observații.

1) Spațiul metric X este de prima categorie Baire dacă $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, unde mulțimea X_n este închisă şi rară.

2) Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este spațiu metric de prima categorie Baire.

Teorema 3 (Baire). *Orice spațiu metric complet* (X,d) *este de categoria a doua Baire.*

Demonstrație. Să presupunem că spațiul metric complet X este de categoria I Baire, deci că $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, unde mulțimea X_n este închisă şi rară, adică $\overline{X \setminus X_n}=X$. Fie $x_1 \in X$. Atunci $x_1 \in \overline{X \setminus X_1}$ şi deci dacă $r_1>0$, avem $B(x_1,r_1)\bigcap(X \setminus X_1)\neq\emptyset$. Dacă $x_2 \in B(x_1,r_1)\bigcap(X \setminus X_1)$, atunci există $r_2>0$ astfel încât $B^*(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)\bigcap(X \setminus X_1)$. Putem presupune că $r_2<r_1/2$. Prin inducție, se construiesc şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(r_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in X$, $r_n>0$ astfel încât, pentru orice $n\geq 1$:

$$B^*(x_{n+1},r_{n+1})\subset B(x_n,r_n)\bigcap(X \setminus X_n),\ r_{n+1}<r_n/2.$$

Atunci $r_n<r_1/2^{n-1}$ şi $d(x_{n+1},x_n)<r_1/2^{n-1}$.

Din inegalitatea precedentă rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este fundamental. Atunci există $x \in X$, $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Avem $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+p}, \cdots\} \subset B^*(x_{n+1}, r_{n+1})$, de unde rezultă că $x \in B^*(x_{n+1}, r_{n+1})$, pentru orice $n \geq 1$.

Din $B^*(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \bigcap (X \setminus X_n)$, rezultă că $x \in X \setminus X_n$ pentru orice $n \geq 1$, adică $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus X_n) = \varnothing$, ceea ce este o contradicție.

Rămâne că (X, d) este de categoria a doua Baire. □

Observație. Rezultatul precedent va fi principalul instrument în obținerea unor rezultate fundamentale, cum ar fi principiul mărginirii uniforme.

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric. O aplicație $f : X \to X$ se numeşte *contracție* (sau q*-contracție*) dacă există $q \in [0,1)$ astfel încât:

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y) \ (x, y \in X).$$

Observații.

1) Constanta q nu este unică.
2) Orice contracție este o funcție uniform continuă.

Teorema 4 (Principiul contracției). *Fie* (X, d) *un spațiu metric complet şi* $f : X \to X$ *o* q*-contracție. Există atunci şi este unic* $x^* \in X$ *astfel încât* $f(x^*) = x^*$.

Dacă $x_0 \in X$ *şi* $x_{n+1} = f(x_n)$, *atunci* $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$ *şi au loc relațiile* $d(x_n, x^*) \leq \dfrac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1}) \leq \dfrac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$.

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ şi $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$. Vom arăta că $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy.

Într-adevăr, avem:

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \le q d\left(x_n, x_{n-1}\right),$$

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \le q^n d\left(x_1, x_0\right),$$

$$d\left(x_{n+p}, x_n\right) \le q^n\left(1 + q + \cdots + q^{p-1}\right) d\left(x_1, x_0\right).$$

Deci $d\left(x_{n+p}, x_n\right) \le \dfrac{q^n}{1-q} d\left(x_1, x_0\right)$.

Şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este atunci şir Cauchy şi deci convergent.

Fie $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Din $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$ şi continuitatea funcției f rezultă $x^* = f\left(x^*\right)$. Dacă $y \in X$ şi $y = f\left(y\right)$, atunci $d\left(y, x^*\right) \le q d\left(y, x^*\right)$ şi deci $y = x^*$, adică x^* este unic cu proprietatea $x^* = f\left(x^*\right)$. Din $d\left(x_{n+1}, x_n\right) \le q d\left(x_n, x_{n-1}\right)$, rezultă că $d\left(x_n, x_{n+p}\right) \le \left(q + q^2 + \cdots + q^p\right) d\left(x_n, x_{n-1}\right)$.

Deci $d\left(x_n, x_{n+p}\right) \le \dfrac{q}{1-q} d\left(x_n, x_{n-1}\right)$.

Trecem la limită după p în inegalitatea de mai sus şi obținem $d\left(x_n, x^*\right) \le \dfrac{q}{1-q} d\left(x_n, x_{n-1}\right)$.

Apoi din inegalitatea $d\left(x_{n+1}, x_n\right) \le q^n d\left(x_1, x_0\right)$, rezultă că: $d\left(x_n, x^*\right) \le \dfrac{q}{1-q} d\left(x_n, x_{n-1}\right) \le \dfrac{q^n}{1-q} d\left(x_1, x_0\right)$. Principiul contracție este demonstrat. □

Observații.

1) În demonstrația precedentă s-a renunțat la analiza cazului $d(x_1, x_0) = 0$.

2) Dacă $A \subset X$ este o mulțime închisă, iar $f : A \to A$ este o contracție, atunci teorema precedentă are loc pe spațiul metric complet (A, d) (X este spațiu metric complet).

2.4. Compacitate în spații metrice

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric şi $A \subset X$.

Se numeşte *acoperire deschisă a mulțimii* A orice familie de mulțimi deschise a cărei reuniune conține pe A.

Familia $(G_i)_{i \in I}$ este deci o *acoperire deschisă* pentru mulțimea A, dacă fiecare mulțime G_i este deschisă şi $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$.

O *subacoperire* a acoperirii $(G_i)_{i \in I}$ este o subfamilie $(G_j)_{j \in J}$, $J \subset I$, astfel încât $A \subset \bigcup_{j \in I} G_j$.

Dacă J este o mulțime finită, se spune că $(G_j)_{j \in J}$ este *subacoperire finită*.

Definiție. *Mulțimea* A se numeşte *compactă* dacă pentru orice acoperire deschisă a sa există o subacoperire finită.

Dacă $A = X$, se spune că X este spațiu *metric compact*.

Observații.

1) În $\mathbb{R}$, cu metrica generată de modul, o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.

2) În $\mathbb{R}^m$, cu metrica generată de o normă, o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.

3) Într-un spațiu metric orice mulțime compactă este evident mărginită şi vom demonstra că este şi închisă.

4) Orice mulțime finită este compactă.

5) Orice submulțime închisă a unei mulțimi compacte este o mulțime compactă.

6) Orice reuniune finită de mulțimi compacte este o mulțime compactă.

7) Fie X o mulțime nevidă şi $d(x,y)=1$, dacă $x=y$ şi $d(x,x)=0$. În spațiul metric (X,d) o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este finită.

Deoarece compacitatea unei mulțimi A se reduce la compacitatea spațiului metric (A,d) se vor studia în continuare spațiile metrice compacte.

Definiție. Se spune că familia de mulțimi $(F_i)_{i\in I}$ are *proprietatea intersecției finite,* dacă pentru orice subfamilie $(F_j)_{j\in J}$, $J\subset I$, J finită, avem $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$.

Teorema 5. *Un spațiu metric este compact dacă şi numai dacă orice familie de mulțimi închise având proprietatea intersecției finite are intersecția nevidă.*

Demonstrație. Afirmația rezultă imediat din definiția compacității utilizând relațiile lui De Morgan. □

Definiție. Un spațiu metric se numeşte *secvențial* (*numărabil*) *compact* dacă pentru orice şir de elemente din acest spațiu există un subşir convergent.

Un spațiu metric X se numeşte *precompact* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} \subset X$ astfel încât

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon) = X .$$

Observație. Orice spațiu metric compact este precompact.

Propoziție. *Orice spațiu metric secvențial compact este precompact.*

Demonstrație. Să presupunem, prin absurd, că spațiul metric (X, d) este secvențial compact şi nu este precompact. Atunci există $\varepsilon > 0$ şi pentru orice mulțime finită $A \subset X$ avem $X \not\subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. Fie $x_1 \in X$ şi fie $A = \{x_1\}$. Atunci $X \not\subset B(x_1, \varepsilon)$ şi deci există $x_2 \in X$ astfel încât $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Se ia apoi $A = \{x_1, x_2\}$ şi rezultă existența unui punct $x_3 \in X$ astfel încât $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ şi $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$. Se construieşte astfel un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ $(n \neq m)$. Dintr-un asemenea şir nu se poate extrage un subşir convergent, ceea ce contrazice ipoteza. □

Lemă (Lebesgue). *Fie (X, d) un spațiu metric secvențial compact şi $(G_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă pentru X. Atunci există $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $x \in X$ există $i \in I$ astfel încât $B(x, \varepsilon) \subset G_i$.*

Demonstrație. Să presupunem, prin absurd, că în spațiul secvențial compact (X,d) există o acoperire deschisă $(G_i)_{i\in I}$ şi pentru orice $\varepsilon>0$ există $x\in X$ astfel încât $B(x,\varepsilon)\not\subset G_i$ pentru orice $i\in I$. În particular, pentru $\varepsilon=1/n$, există $x_n\in X$ astfel încât, oricare ar fi $i\in I$, avem $B(x_n,1/n)\not\subset G_i$. Fie, conform ipotezei, $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir convergent al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi fie $y=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, $y\in X$. Deoarece $(G_i)_{i\in I}$ acoperă pe X, există $j\in I$ asfel încât $y\in G_j$. Mulțimea G_j fiind deschisă, există $r>0$ aşa ca $B(y,r)\subset G_j$. Fie $n_k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{1}{n_k}<\dfrac{r}{2}$ şi $d\left(x_{n_k},y\right)<r/2$. Atunci avem $B\left(x_{n_k},1/n_k\right)\subset B(y,r)$, iar din $B(y,r)\subset G_j$ rezultă $B\left(x_{n_k},1/n_k\right)\subset G_j$, ceea ce contrazice relația $B(x_n,1/n)\not\subset G_i$. □

Observație. Lema precedentă arată că pentru a acoperi spațiul nu sunt necesare din $(G_i)_{i\in I}$ acele mulțimi care au diametrul mai mic decât 2ε.

Teorema 6. *Un spațiu metric este compact dacă şi numai dacă este secvențial compact.*

Demonstrație. Fie (X,d) un spațiu metric secvențial compact şi $(G_i)_{i\in I}$ o acoperire deschisă pentru X. Conform lemei lui Lebesgue, există $\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $x\in X$ există $i(x)\in I$ astfel încât $B(x,\varepsilon)\subset G_{i(x)}$. Deoarece, conform

propoziției de mai sus, spațiul X este precompact există $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\} \subset X$ astfel încât $\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon) = X$, iar din $B(x, \varepsilon) \subset G_{i(x)}$ rezultă că $\bigcup_{k=1}^{n} G_{i(x_k)} = X$. Pentru acoperirea $(G_i)_{i \in I}$ există deci o subacoperire finită, adică X este compact.

Reciproc, fie (X, d) un spațiu metric compact şi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir în X. Fie $A_n = \{x_m : m > n\}$. Familia de mulțimi închise $\left\{\overline{A_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ are proprietatea intersecției finite, iar din ipoteză şi teorema 5 rezultă că $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \neq \varnothing$. Fie $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$. Atunci:

$$B(z,1) \cap A_1 \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \exists\, n_1 > 1,\; d\left(x_{n_1}, z\right) < 1,$$

$$B(z,1/2) \cap A_{n_1} \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \exists\, n_2 > n_1,\; d\left(x_{n_2}, z\right) < 1/2.$$

Se construieşte astfel un subşir $\left(x_{n_k}\right)_{k \geq 1}$ astfel încât $d\left(x_{n_k}, z\right) < 1/k$, deci $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = z$. Spațiul X este secvențial compact, ceea ce încheie demonstrația. □

Corolarul 1. *Fie (X, d) un spațiu metric. Mulțimea $A \subset X$ este compactă dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din A există un subşir $\left(a_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ şi există $a \in A$ astfel încât $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$.*

Demonstrație. Faptul că spațiul metric (A, d) este compact înseamnă compacitatea mulțimii A. □

Corolarul 2. *Orice mulțime compactă este închisă.*

Definiţie. O mulţime dintr-un spaţiu metric se numeşte *relativ compactă* dacă închiderea ei este compactă.

Corolarul 3. *Mulţimea A este relativ compactă dacă şi numai dacă pentru orice şir din A există un subşir convergent.*

Demonstraţie. Dacă $\overline{A}$ este compactă, atunci, conform corolarului 1 pentru orice şir din A există un subşir convergent.

Pentru afirmaţia reciprocă, fie $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir în $\overline{A}$. Există atunci $x_n \in A$, $d\left(x_n, y_n\right) < 1/n$. Conform ipotezei, există un subşir $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $x \in \overline{A}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Atunci $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x$ şi se aplică corolarul 1. □

Teorema 7. *Un spaţiu metric este compact dacă şi numai dacă este precompact şi complet.*

Demonstraţie. Un spaţiu metric compact este secvenţial compact, de unde rezultă imediat că este complet.

Reciproc, fie $\left(X, d\right)$ un spaţiu metric precompact şi complet. Vom arăta că este secvenţial compact. Fie un şir $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ din *X*. Pentru $\varepsilon = 1/2^2$, există $\left\{a_1, a_2, \cdots, a_m\right\} \subset X$ astfel încât $\bigcup_{i=1}^{m} B\left(a_i, 1/2^2\right) = X$. Există atunci un subşir $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \cdots$, astfel încât $d\left(x_{1n}, x_{1m}\right) < 1/2$. Pentru $\varepsilon = 1/2^3$, există un subşir al şirului precedent $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots$, astfel încât $d\left(x_{2n}, x_{2m}\right) < 1/2^2$ şi aşa mai departe. Atunci $\left(x_{nn}\right)_{n\geq 1}$ este un subşir al şirului iniţial şi $d\left(x_{nn}, x_{n+1n+1}\right) < 1/2^n$. Rezultă că

$(x_{nn})_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci convergent. În concluzie (X,d) este secvențial compact şi teorema este demonstrată. □

2.5. Exerciții

1) $E \subset F \;\Rightarrow\; \delta(E) \leq \delta(F)$.

2) $\delta(E) = 0 \;\Leftrightarrow\; E$ se reduce la un punct.

3) Reuniunea a două mulțimi mărginite este mărginită.

4) Intersecția a două mulțimi deschise este deschisă.

5) Reuniunea oricărei familii de mulțimi deschise este deschisă.

6) Oricare mulțime închisă este intersecția unui şir descrescător de mulțimi deschise.

7) Oricare mulțime deschisă este reuniunea unui şir crescător de mulțimi înschise.

8) Care este frontiera unui interval din $\mathbb{R}$?

9) Care este frontiera mulțimii $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$?

10) Fie $\mathbb{R}[x]$ mulțimea funcțiilor polinomiale organizată ca spațiu metric cu $d(p,q) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |p(t) - q(t)|$. Să se arate că $(\mathbb{R}[x], d)$ este de categoria I Baire.

11) Fie $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcție derivabilă pentru care există $q \in (0,1)$ astfel încât $|f'(x)| \leq q \quad (x \in [a,b])$. Să se arate că pentru f se poate aplica principiul contracție.

12) Fie pe $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ aplicația definită prin:

$$d(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Să se arate că d este o distanță pe $\mathbb{R}$ şi să se determine şirurile convergente, mulțimile mărginite şi mulțimile compacte în $(\mathbb{R}, d)$. □ ▪

3

S P A Ț I I   B A N A C H[1]

3.1. Spații liniare normate. Proprietăți de bază

Notăm cu $\mathbb{K}$ corpul numerelor reale $\mathbb{R}$ sau corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$.

Fie X un spațiu liniar peste corpul $\mathbb{K}$.

Definiție. O aplicație $\|\ \|: X \to \mathbb{R}$ se numeşte *normă* pe spațiul liniar X dacă satisface următoarele axiome:

i) $\|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$;

ii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X)$;

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{K}, x \in X)$.

Observații.

1) $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$. Din $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ rezultă $\|0\| = 0$, adică, $x = 0 \ \Rightarrow\ \|x\| = 0$.

2) $\|-x\| = \|x\| \quad (x \in X)$;

3) $\|x\| \ge 0 \ (x \in X)$. Rezultă din $0 = \|x - x\| \le \|x\| + \|-x\|$.

---

[1] **Stefan Banach** (30 martie 1892 - 31 august 1945).

În concluzie, o normă pe un spațiu liniar (real sau complex) X este o aplicație $x \mapsto \|x\|$ a lui X în intervalul $[0,\infty)$ al dreptei reale.

Propoziție. $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\| \quad (x, y \in X)$.

Demonstrație. Avem $\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$, deci $\|x\|-\|y\| \le \|x-y\|$, pentru fiecare $x, y \in X$. Prin simetrie, avem $\|y\|-\|x\| \le \|y-x\|$, adică $-(\|x\|-\|y\|) \le \|x-y\|$.
Deci, $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\| \quad (x, y \in X)$. □

Exemple.

1) Cele mai simple exemple de norme sunt modulul (sau valoarea absolută) $|\ |$ pe $\mathbb{R}$ şi modulul $|\ |$ pe $\mathbb{C}$.

2) Pe spațiul liniar *n-dimensional* $\mathbb{K}^n$, o normă este definită prin $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$, unde $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. Aceasta este numită *norma euclidiană*.

3) Fie $m_{\mathbb{K}}$ spațiul liniar al tuturor şirurilor mărginite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ din $\mathbb{K}$. Dacă definim $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \quad \left(x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, atunci $\|\ \|$ este normă.

4) Pe spațiul liniar $\ell_{\mathbb{K}}$ al tuturor şirurilor $x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elemente din $\mathbb{K}$, cu proprietatea că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ este convergentă, o normă este definită de $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$.

5) Fie $C_{\mathbb{K}}([0,1])$ spațiul liniar al tuturor funcțiilor continue $f:[0,1]\to\mathbb{K}$. Definim o normă pe $C_{\mathbb{K}}([0,1])$ prin $\|f\| = \max_{t\in[0,1]}|f(t)| \ \left(f\in C_{\mathbb{K}}([0,1])\right)$.

Definiție. Un spațiu liniar X pe care a fost fixată o normă $\|\ \|$ se numeşte *spațiu liniar normat.* Un spațiu liniar X normat cu norma $\|\ \|$ se notează $(X,\|\ \|)$.

Un spațiu liniar normat este numit *spațiu liniar normat real* sau *spațiu liniar normat complex*, după cum corpul scalarilor este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Teorema 1. *Oricare spațiu liniar normat $(X,\|\ \|)$ este spațiu metric în raport cu distanța definită de $d(x,y)=\|x-y\|$ pentru oricare $x,y\in X$.*

Demonstrație. Verificăm condițiile din definiția distanței. Condiția $d(x,y)=0$ este echivalentă cu condiția $\|x-y\|=0$, deci $x=y$. Este evident că $d(x,y)=d(y,x)$. Fie $x,y,z\in X$. Atunci $d(x,y)=\|x-y\|\le\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$. □

Observație. Din egalitățiile, adevărate pentru oricare $x,y,z\in X$, $d(x+z,y+z)=\|x+z-(y+z)\|=\|x-y\|=d(x,y)$ rezultă că metrica d definită de o normă $\|\ \|$ este invariantă la translație, adică $d(x+z,y+z)=d(x,y) \quad (x,y,z\in X)$.

Metrica d, definită mai sus, se numeşte *metrica* (sau *distanța*) *asociată normei* $\| \ \|$.

Notă. *Toate noțiunile şi toate rezultatele expuse pentru spații metrice sunt valabile şi pentru spații liniare normate.*

Reamintim, în termenii normei, unele noțiuni şi rezultate de la spații metrice.

Bila deschisă, *bila închisă*, *sfera* cu centrul $x_0 \in X$ şi de rază $r > 0$ sunt definite, respectiv, de mulțimile următoare:

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\},$$

$$B^*(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\},$$

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}.$$

Denumirile de *bila unitate deschisă*, *bila unitate închisă*, *sfera unitate* se referă la bila deschisă, bila închisă, respectiv sfera cu centrul în originea spațiului şi de rază $r = 1$. Adică,

$B(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ este *bila unitate deschisă*,

$B^*(0,1) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ este *bila unitate închisă*,

$S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ este *sfera unitate*.

Fie A o mulțime dintr-un spațiu liniar normat X. Mulțimea A se numeşte *mulțime deschisă* dacă, pentru oricare $x \in A$, există o bilă deschisă $B(x, r)$ (cu centrul în x şi de rază $r > 0$) astfel încât $B(x, r) \subset A$.

Fie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir din spațiul liniar normat $(X, \| \ \|)$. *Şirul* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *are limita* $x \in X$, şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, dacă şi numai

dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. Spunem că *şirul* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge* la x sau că *şirul* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *este convergent şi are limita* x. Convergența astfel definită este numită *convergența în normă*.

Pentru ca o mulțime A dintr-un spațiu liniar normat X să fie *mulțime închisă* este necesar şi suficient ca limita oricărui şir convergent de elemente din A să aparțină mulțimii A.

Pentru ca o mulțime A dintr-un spațiu liniar normat X să fie *relativ compactă* este necesar şi suficient ca din oricare şir de elemente din A să se poată extrage un şir convergent (către un element din X).

Şirul $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se numeşte *şir Cauchy* dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât $n,m \ge N(\varepsilon)$ implică $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Propoziție. *Fie* $(X,\|\ \|)$ *un spațiu liniar normat, fie* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un şir de elemente din* X. *Dacă* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *este un şir convergent către un element* $x \in X$, *atunci* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *este şir Cauchy.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir convergent către un element $x \in X$. Atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât $n \ge N(\varepsilon)$ implică $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$. Dacă $n,m \ge N(\varepsilon)$, atunci:

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon ,$$

adică $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ este şir Cauchy. □

Observație. *Într-un spațiu liniar normat, nu orice şir Cauchy este convergent.*

Justificare. Fie spațiul liniar s_0 al tuturor şirurilor cu elemente nule de la un anumit rang (depinzând de şir), organizat ca spațiu normat cu $\|x\| = \sup\left\{|\alpha_n| : n = 1, 2, 3, \cdots\right\}$, unde $x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. Şirul $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots\right)$ este şir Cauchy, dar nu este convergent. □

Propoziție. *Norma unui spațiu liniar normat* $\left(X, \|\ \|\right)$ *este funcție continuă.*

Demonstrație. Fie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ un şir convergent la un element $x \in X$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$. Din inegalitatea $\left|\|x_n\| - \|x\|\right| \le \|x_n - x\|$ rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$, care implică $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\|$. □

Propoziție. *Fie* $\left(X, \|\ \|\right)$ *un spațiu liniar normat. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ *şi dacă* $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$*, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \left(x_n + y_n\right) = x + y \text{ şi } \lim_{n \to \infty} \left(\alpha_n x_n\right) = \alpha x .$$

Demonstrație. Din ipoteză şi din inegalitatea

$$\left\|\left(x_n + y_n\right) - \left(x + y\right)\right\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} \left\|\left(x_n + y_n\right) - \left(x + y\right)\right\| = 0$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x_n + y_n\right) = x + y$.

De asemenea, avem:

$$\begin{aligned}\left\|\alpha_n x_n - \alpha x\right\| &= \left\|\alpha_n\left(x_n - x\right) - \left(\alpha_n - \alpha\right)x\right\|, \\ &\leq \left|\alpha_n\right|\left\|x_n - x\right\| + \left|\alpha_n - \alpha\right|\left\|x\right\|\end{aligned}$$

de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha_n x_n\right) = \alpha x$. □

Este evident că bila deschisă este inclusă în bila închisă cu acelaşi centru şi aceeaşi rază. Următoarea proprietate nu este valabilă în orice spațiu metric.

Propoziție. *Într-un spațiu liniar normat $\left(X, \|\ \|\right)$, închiderea bilei deschise $B\left(x_0, r\right)$ este bila închisă $B^*\left(x_0, r\right)$.*

Demonstrație. Fie $y \in B^*\left(x_0, r\right)$ cu proprietatea $\left\|y - x_0\right\| = r$. Fie $\left\{\varepsilon_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ un şir de numere cu proprietățile $0 < \varepsilon_n < 1$ $\left(n = 1, 2, 3, \cdots\right)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$.

Notăm $x_n = \varepsilon_n x_0 + \left(1 - \varepsilon_n\right)y$ $\left(n = 1, 2, 3, \cdots\right)$ şi observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Deoarece

$$\left\|x_n - x_0\right\| = \left\|\varepsilon_n x_0 + \left(1 - \varepsilon_n\right)y - x_0\right\| = \left(1 - \varepsilon_n\right)\left\|y - x_0\right\| < r,$$

rezultă că $x_n \in B\left(x_0, r\right)$ $\left(n = 1, 2, 3, \cdots\right)$.

Deci $y \in \overline{B\left(x_0, r\right)}$.

Reciproc, dacă $y \in \overline{B\left(x_0, r\right)}$, atunci există un şir de elemente $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset B\left(x_0, r\right)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n - x_0\right\| = \left\|y - x_0\right\|$.

Dar $\left\|x_n - x_0\right\| < r$ implică $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n - x_0\right\| \leq r$.

Deci $\|y-x_0\| \le r$, adică $y \in B^*(x_0,r)$.

Astfel, am demonstrat că $\overline{B(x_0,r)} = B^*(x_0,r)$.

Pe baza acestei propoziții, bila închisă $B^*(x_0,r)$ o vom nota prin $\overline{B}(x_0,r)$. □

O mulțime A dintr-un spațiu liniar normat este *mărginită* dacă $\sup\limits_{x\in A}\|x\| < \infty$.

Observație. *Echivalența acestei definiții cu aceea din spațiile metrice se arată în felul următor.*

Justificare. Dacă A este mărginită, atunci diametrul $\delta(A) = \sup\limits_{x,y\in A}\|x-y\| < \infty$. Reciproc, dacă $\delta(A) = \sup\limits_{x,y\in A}\|x-y\| < \infty$, atunci, pentru fiecare $y \in A$, din $\|x\| \le \|y\| + \|x-y\|$ rezultă $\sup\limits_{x\in A}\|x\| < \|y\| + \delta(A) < \infty$. □

Propoziție. *Într-un spațiu liniar normat* $(X,\|\ \|)$*, o mulțime* A *este mărginită dacă și numai dacă pentru orice șir* $(a_n)_n$ *de elemente din* A *și pentru orice șir de numere* $(\lambda_n)_n$ *cu* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ *avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n a_n = 0$. □

Demonstrație. Într-adevăr, dacă mulțimea A are proprietatea din enunț și dacă am presupune că este nemărginită, ar exista un șir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elemente din A astfel încât $\|a_n\| \ge n^2$.

Atunci $\left\|\frac{1}{n}a_n\right\| \ge n$, ceea ce contrazice ipoteza. □

Definiție. Două spații liniar normate $\left(X, \| \ \|_X\right)$ şi $\left(Y, \| \ \|_Y\right)$ peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ se numesc *izomorfe ca spații liniare normate* dacă există o bijecție liniară $U : X \to Y$ asfel încât $\|U(x)\|_Y = \|x\|_X \ (x \in X)$.

Definiție. Două norme $\| \ \|_1$ şi $\| \ \|_2$ definite pe un spațiu liniar X se numesc *echivalente* dacă există $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ asfel încât $\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1 \quad (x \in X)$.

Propoziție. *Două norme $\| \ \|_1$ şi $\| \ \|_2$ definite pe un spațiu liniar X sunt echivalente dacă şi numai dacă aplicația identitate $I : \left(X, \| \ \|_1\right) \to \left(X, \| \ \|_2\right)$, $I(x) = x \ (x \in X)$ este homeomorfism.*

Demonstrație. Dacă $I : \left(X, \| \ \|_1\right) \to \left(X, \| \ \|_2\right)$ este continuă, atunci este continuă în $x = 0$ şi deci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel încât $\|x\|_1 \le \eta$ implică $\|x\|_2 \le \varepsilon$. Pentru $x \ne 0$ avem $\left\|\frac{\eta}{\|x\|_1} x\right\|_1 = \eta$ şi deci $\left\|\frac{\eta}{\|x\|_1} x\right\|_2 \le \varepsilon$, adică $\|x\|_2 \le \frac{\varepsilon}{\eta}\|x\|_1$, relație valabilă şi pentru $x = 0$.

Aplicația I^{-1} fiind, de asemenea, continuă va rezulta că există $\gamma > 0$ astfel încât $\|x\|_1 \le \gamma\|x\|_2$ şi, prin urmare, cele două norme sunt echivalente.

Reciproca este evidentă. $\square$

3.2. Spații liniare normate de dimensiune finită

Teorema 2. *În spațiul liniar m-dimensional $\mathbb{R}^m$ orice două norme sunt echivalente.*

Demonstrație. Fie $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1,2,3,\cdots,m\}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ şi fie $\| \ \|$ o normă pe $\mathbb{R}^m$. Fie $X = \left(\mathbb{R}^m, \| \ \|_\infty\right)$ şi $Y = \left(\mathbb{R}^m, \| \ \|\right)$. Atunci este evident că în X, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ în sensul normei $\| \ \|_\infty$, dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$ $(i = 1,2,\cdots,m)$, unde $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}\right)$ şi $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

Deoarece în $\mathbb{R}$ o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă, din obervația precedentă rezultă că în $X = \left(\mathbb{R}^m, \| \ \|_\infty\right)$ o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă. (S-a folosit faptul că în spații metrice compacitatea este echivalentă cu secvențial compacitatea). Rezultă că mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_\infty = 1\right\}$ este compactă în X.

Fie $\varphi : X \to Y$ aplicația identică $\varphi(x) = x$. Tot din observația referitoare la caracterizarea convergenței în X, rezultă că φ este continuă. Există atunci $M > 0$ astfel încât:

$$\|\varphi(x)\| \le M \|x\|_\infty \quad \left(x \in \mathbb{R}^m\right) \tag{3.2.1}$$

Mulțimea A fiind compactă, iar φ continuă, rezultă că $\varphi(A)$ este compactă, adică A este compactă în raport cu $\| \ \|$. Atunci A este închisă în Y şi deci $X \setminus A$ este deschisă în raport cu $\| \ \|$.

Cum $0 \in X \setminus A$, rezultă că există $r > 0$ astfel încât:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < r\right\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_\infty < 1\right\} \cup \cup \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_\infty > 1\right\} \quad (3.2.2)$$

Vom arăta că:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < r\right\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_\infty < 1\right\} \quad (3.2.3)$$

Să presupunem că există $y, z \in \mathbb{R}^m$ cu $\|y\| < r$, $\|z\| < r$ şi $\|y\|_\infty < 1$, $\|z\|_\infty > 1$.

Atunci funcția definită de $g(\alpha) = \|\alpha y + (1-\alpha) z\|_\infty$ este continuă pe $[0,1]$, $g(1) < 1$, $g(0) > 1$ şi din proprietatea lui Darboux rezultă că există $\alpha \in (0,1)$ asfel încât $g(\alpha) = 1$, adică $\|\alpha y + (1-\alpha) z\|_\infty = 1$. Aceasta contrazice însă relația (3.2.2) căci $\|\alpha y + (1-\alpha) z\|_\infty < r$. Are loc deci relația (3.2.3), de unde rezultă că $\|x\|_\infty \le \frac{2}{r}\|x\| \; \left(x \in \mathbb{R}^m\right)$. Din (3.2.1) rezultă atunci că normele $\| \; \|_\infty$ şi $\| \; \|$ sunt echivalente. □

Corolar 1. *În orice spațiu liniar finit dimensional X, orice două norme sunt echivalente.*

Demonstrație. Fie X un spațiu liniar de dimensiune n peste corpul $\mathbb{K}$ şi fie $\varphi : \mathbb{K}^n \to X$ un izomorfism algebric. Dacă p şi q sunt norme pe X, atunci $p \circ \varphi$ şi $q \circ \varphi$ sunt norme pe $\mathbb{K}^n$, care conform teoremei precedente sunt echivalente. Rezultă că normele p şi q sunt echivalente. □

Observație. *Un spațiu liniar X este de dimensiune finită dacă şi numai dacă orice două norme pe X sunt echivalente.*

Justificare. Într-adevăr, dacă pe X orice două norme sunt echivalente şi dacă $\{e_i\}_{i\in I}$ este o bază algebrică în X, atunci pe X se consideră normele:

$$p(x)=\sum_{i\in I}|\alpha_i|,\ x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i\ ,$$

$$q(x)=\max\{|\alpha_i| : i\in I\},\ x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i\ .$$

Din echivalența acestor norme rezultă că $\dim X<\infty$. □

Corolar 2. *Fie X şi Y spații liniare normate, X de dimensiune finită şi $U : X\to Y$ o aplicație liniară. Atunci U este continuă.*

Demonstrație. Fie $\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_m\}$ o bază algebrică în X şi $p(x)=\max\{|\alpha_i| : i=1,2,\cdots,m\}$, $x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i$. Norma p este atunci echivalentă cu norma inițială din X. Notând cu $\|\ \|$ norma din Y avem $\|U(x)\|\le\sum_{i=1}^{m}\|U(e_i)\|\cdot p(x)$, de unde rezultă că aplicația U este continuă. □

Corolar 3. *Orice subspațiu liniar de dimensiune finită al unui spațiu liniar normat este închis.*

Demonstrație. Un subspațiu liniar de dimensiune finită, fiind izomorf ca spațiu liniar normat cu $\mathbb{K}^n$ este spațiu Banach şi este deci închis. □

Teorema 3 (Teorema lui Riesz). *Un spațiu liniar normat este de dimensiune finită dacă şi numai dacă are o vecinătate compactă a originii.*

Demonstrație. Presupunem că în spațiul liniar normat X există V o vecinătate compactă a originii. Pentru orice $x \in X$, mulțimea $x + \frac{1}{2}\operatorname{Int} V$ este o vecinătate deschisă a lui x. Familia $\left\{x + \frac{1}{2}\operatorname{Int} V\right\}_{x \in V}$ este o acoperire deschisă pentru V şi există atunci o subacoperire finită $V \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{2}\operatorname{Int} V\right)$. Atunci

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{2}V\right). \tag{3.2.4}$$

Fie Y spațiul liniar generat de $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Vom arăta că $Y = X$ şi pentru aceasta vom demonstra că $V \subseteq Y$. Dacă $v \in V$, din (3.2.4) rezultă că $v = x_j + \frac{1}{2}w$, unde $w \in V$.

Repetând descrierea precedentă pentru w rezultă că $v = x_j + \dfrac{1}{2}x_k + \dfrac{1}{2^2}z$, unde $z \in V$.

Prin inducție, obținem:

$$v = y_k + \frac{1}{2^k}z_k, \tag{3.2.5}$$

unde $y_k \in Y$, $z_k \in V$ şi $k \geq 1$.

Mulțimea V este compactă, deci mărginită şi atunci $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{1}{2^k} z_k = 0$. Din (3.2.5) rezultă că $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = v$ şi, întrucât Y este închis (ca subspațiu de dimensiune finită), rezultă $V \subseteq Y$. Atunci $Y = X$ şi deci $\dim X < \infty$.

Reciproca rezultă din teorema 2. $\square$

Teorema 4. *Fie X un spațiu liniar normat, $Y \subset X$ un subspațiu de dimensiune finită și $x \in X$. Atunci există $z \in Y$ astfel încât* $\|x-z\| = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$.

Demonstrație. Fie $d = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$ şi $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, $d \le \|x-y_n\| < d + 1/n$. Şirul $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ fiind mărginit, iar Y finit dimensional, există un subşir convergent către $z \in Y$.

Atunci $\|x-z\| = d$. □

Exerciții.

1) Fie X un spațiu liniar normat. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente.

i) $\dim X < \infty$;

ii) orice normă pe X este continuă;

iii) orice funcțională liniară pe X este continuă;

iv) orice subspațiu liniar al lui X este închis;

v) din orice şir mărginit de elemente din X se poate extrage un subşir convergent.

2) Un spațiu liniar normat X se numeşte *strict convex* dacă $\|x\| = \|y\| = 1$ şi $\|x+y\| = 2$, atunci $x = y$.

Să se arate că dacă X este stict convex, atunci elementul z din teorema 4 este unic.

3.3. Produs cartezian de spații liniare normate

Demonstrăm mai întâi *inegaliatea lui Hölder* şi *inegalitatea lui Minkowski*.

Lemă. *Dacă* α, β, p, q *sunt numere reale cu proprietățile următoare:* $\alpha > 0, \beta > 0, p > 1, q > 1$ *şi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, atunci*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Demonstrație. Considerăm funcția reală de variabilă reală $f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$, $(t > 0)$.

Derivata acestei funcției este $f'(t) \leq t^{p-1} - t^{-q-1}$ şi $f'(1) = 0$.

Observăm că $f'(t) < 0$ dacă $t < 1$ şi $f'(t) > 0$ dacă $t > 1$.

Deci, funcția f are o valoare minimă: $f(1) = 1$.

Calculăm $f(t)$ pentru $t = \alpha^{1/q}\beta^{-1/p}$ şi obținem următoarele egalități:

$$\begin{aligned}
1 &= f(1) \leq f\left(\alpha^{1/q}\beta^{-1/p}\right) \\
&= \frac{1}{p}\alpha^{p/q}\beta^{-1} + \frac{1}{q}\alpha^{-1}\beta^{q/p} \\
&= \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{p}\alpha^{\frac{p}{q}+1} + \frac{1}{q}\beta^{\frac{q}{p}+1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q\right).
\end{aligned}$$

De aici rezultă că $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$. □

Propoziție. *Dacă* $\alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0$, $k = 1,2,3,\cdots,n$ *şi dacă* $p > 1$ *şi* $q > 1$ *au proprietatea* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^{p} \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k{}^{q} \right)^{1/q}.$$

(Inegalitatea lui Hölder)

Demonstrație. Pentru demonstrație considerăm cazul când cel puțin un număr $\alpha_k \neq 0$ şi cel puțin un număr $\beta_k \neq 0$.

Dacă în inegalitatea $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$ punem:

$$\alpha = \frac{\alpha_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^{p} \right)^{1/p}} \text{ şi } \beta = \frac{\beta_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k{}^{q} \right)^{1/q}},$$

atunci obținem inegalitatea următoare:

$$\frac{\alpha_k \beta_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^{p} \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k{}^{q} \right)^{1/q}} \leq \frac{\alpha_k{}^{p}}{p\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^{p} \right)^{1/p}} + \frac{\beta_k{}^{q}}{q\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k{}^{q} \right)^{1/q}}.$$

Însumăm această expresie în raport cu k şi avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^{p} \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k{}^{q} \right)^{1/q}.$$

De aici rezultă *inegalitatea lui Hölder.* □

Propoziție. *Dacă* $\alpha_k \geq 0,\ \beta_k \geq 0\ \left(k = 1,2,3,\cdots,n\right)$, $p > 1,\ q > 1$ *şi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *atunci*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{\ p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{\ p}\right)^{1/p}.$$

(Inegalitatea lui Minkowski)

Demonstrație. Folosim inegalitatea lui Hölder şi obținem:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^p &= \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^{p-1}\left(\alpha_k + \beta_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^{p-1}\alpha_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^{p-1}\beta_k\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{\ p}\right)^{1/p} +\\ &+ \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{\ p}\right)^{1/p} =\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{\ p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{\ p}\right)^{1/p}\right].$$

Deci,

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^p\right]^{1-\frac{p-1}{p}} \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{\ p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{\ p}\right)^{1/p}\right].$$

Astfel rezultă *inegalitatea lui Minkowski:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k + \beta_k\right)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{\ p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{\ p}\right)^{1/p}. \quad \square$$

Produs cartezian de spații liniare normate

Fie $X_1, X_2, \cdots, X_n$ spații liniare peste acelaşi corp $\mathbb{K}$.

Prin definiție, produsul cartezian al spațiilor liniare $X_1, X_2, \cdots, X_n$ este spațiul liniar produs $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$, definit astfel:

$$\prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right) : x_k \in X_k \right\},$$

cu operațiile algebrice:

$$x + y = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n \right) \quad \left(x, y \in X \right),$$

$$\alpha x = \left(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n \right) \quad \left(\alpha \in \mathbb{K}, x \in X \right),$$

unde $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right)$, $y = \left(y_1, y_2, \cdots, y_n \right)$, $x_k, y_k \in X_k$.

Teorema 5. *Dacă* $\left(X_1, \| \ \|_1 \right), \left(X_2, \| \ \|_2 \right), \cdots, \left(X_n, \| \ \|_n \right)$ *sunt spații liniare normate peste acelaşi corp* $\mathbb{K}$*, atunci expresiile:*

$$\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} \|x_k\|_k,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^p \right)^{1/p} \quad \left(p \ge 1 \right)$$

definesc norme echivalente pe spațiul produs $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

Demonstrație. Fie $x, y \in X$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$. Verificăm că expresia $\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} \|x_k\|_k$ defineşte o normă pe spațiul produs.

Dacă $\|x\|_0 = 0 = \max_{1 \le k \le n} \|x_k\|_k$, atunci rezultă imediat că $x = 0$.

De asemenea, avem:

$$\|\alpha x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} \|\alpha x_k\|_k = |\alpha| \max_{1 \le k \le n} \|x_k\|_k = |\alpha| \|x\|_0.$$

Apoi, avem:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_0 &= \max_{1\le k\le n}\|x_k+y_k\|_k \\ &\le \max_{1\le k\le n}\left(\|x_k\|_k+\|y_k\|_k\right) \\ &\le \max_{1\le k\le n}\|x_k\|_k+\max_{1\le k\le n}\|y_k\|_k \\ &\le \|x\|_0+\|y\|_0 .\end{aligned}$$

Demonstrăm că $\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_k^p\right)^{1/p}$ verifică, de asemenea, axiomele normei.

Este uşor de verificat că $\|x\|_p=0$ implică $x=0$ şi $\|\alpha x\|_p=|\alpha|\|x\|_p$.

Folosind inegalitatea lui Minkowski demonstrăm inegalitatea triunghiului $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$.

Avem:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k+y_k\|^p\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\|x_k\|+\|y_k\|\right)^p\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|^p\right)^{1/p} \\ &= \|x\|_p+\|y\|_p .\end{aligned}$$

Se poate verifica uşor că normele $\| \ \|_0$ şi $\| \ \|_p$ sunt echivalente.

Spațiul liniar produs $X=\prod_{k=1}^{n}X_k$, normat cu una din normele definite mai sus este numit *spațiul normat produs al spațiilor liniare normate* X_k $\left(k=1,2,3,\cdots,n\right)$. □

3.4. Spațiu liniar normat cât

Fie X un spațiu liniar normat peste corpul $\mathbb{K}$.

Propoziție. *Dacă X_0 este un subspațiu liniar al unui spațiu liniar normat X, atunci închiderea sa $\overline{X_0}$ este subspațiu liniar închis al lui X.*

Demonstrație. Dacă $x, y \in \overline{X_0}$ şi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sunt şiruri din X_0 astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, atunci $\alpha x + \beta y = \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) \in \overline{X_0}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. □

Propoziție. *Fie X un spațiu liniar normat şi X_0 un subspațiu liniar închis al lui X. Fie X/X_0 spațiul liniar cât al lui X prin X_0. Atunci expresia $\|\hat{x}\| = \inf\limits_{x\in\hat{x}} \|x\|$ $(\hat{x} \in X/X_0)$ defineşte o normă pe spațiul liniar cât X/X_0.*

Demonstrație. Fie $\|\hat{x}\| = 0$. Atunci există $x_n \in \hat{x}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$. Deoarece X_0 este subspațiu liniar închis, clasa $\hat{x} = x + X_0$ este mulțime închisă în X. Astfel rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \in \hat{x}$. Deci $\hat{x} = X_0 = \hat{0}$.

Fie $\hat{x}, \hat{y} \in X/X_0$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x_0 \in \hat{x}$ şi $y_0 \in \hat{y}$ astfel încât $\|x_0\| < \|\hat{x}\| + \varepsilon$ şi $\|y_0\| < \|\hat{y}\| + \varepsilon$. De aici rezultă că $\|\hat{x} + \hat{y}\| \le \|x_0 + y_0\| \le \|x_0\| + \|y_0\| < \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\| + 2\varepsilon$. Deci $\|\hat{x} + \hat{y}\| \le \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$.

Condiția $\|\alpha\hat{x}\| = |\alpha|\|\hat{x}\|$ $(\alpha \in \mathbb{K}, \hat{x} \in X/X_0)$ se verfică imediat.

Spațiul liniar cât X/X_0 al lui X prin X_0, normat cu norma $\|\hat{x}\| = \inf_{x\in\hat{x}} \|x\|$ $(\hat{x} = x + X_0)$ se numeşte *spațiu liniar normat cât* (al lui X prin X_0). □

Observație. Aplicația $x \mapsto \hat{x}$ este continuă.

3.5. Spații liniare normate separabile

Fie X un spațiu liniar normat peste corpul $\mathbb{K}$.

Definiție. Un spațiu liniar normat X se numeşte *separabil* dacă există o muțime numărabilă $A \subset X$ astfel încât $\overline{A} = X$.

Dacă X este un spațiu liniar normat separabil, atunci există o submulțime numărabilă $A \subset X$ cu proprietatea că pentru oricare element $x \in X$, există un şir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elemente din mulțimea A astfel încât $x = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Propoziție. *Dacă X este un spațiu liniar normat de dimensiune finită, atunci X este separabil.*

Demonstrație. Considerăm cazul când X este spațiu liniar normat real de dimensiune m.

Dacă $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ este o bază algebrică în X, atunci mulțimea $A = \{x = (q_1, q_2, \cdots, q_m)_E : q_k \in \mathbb{Q}\ (k = 1, 2, \cdots, m)\}$ este numărabilă şi densă în X. □

Definiție. Fie X un spațiu liniar normat. Un şir $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elemente ale lui X cu proprietatea că oricare element $x \in X$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, $\alpha_n \in \mathbb{K}, \left(n = 1, 2, 3, \cdots\right)$ se numeşte *bază Schauder* a spațiului X.

Exemplu. Spațiul liniar normat $\ell_{\mathbb{R}}$ are o bază Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, unde $e_n = \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$, cu δ_{kn} este simbolul lui Kronecker: $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kn} = 0,\ n \neq k$.

Teorem 6. *Dacă X este un spațiu liniar normat care admite o bază Schauder, atunci X este spațiu liniar normat separabil.*

Demonstrație. Considerăm cazul în care spațiul liniar normat X este real.

Fie $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ o bază Schauder a spațiului liniar normat X.

Notăm $A = \left\{x = \sum_{k=1}^{n} q_k e_k : q_k \in \mathbb{Q}\ \left(k = 1, 2, \cdots, n\right)\right\}$. Este evident că mulțimea A este numărabilă.

Demonstrăm că mulțimea A este densă în spațiul liniar normat X. Fie $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Dacă notăm $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Pentru fiecare n, fie $q_{n1}, q_{n2}, \cdots, q_{n-1n}, q_{nn} \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $\left|q_{nk} - \alpha_k\right| < 1 / \left(n^2 \|e_k\|\right),\ \left(k = 1, 2, 3, \cdots, n\right)$.

Dacă notăm $y_n = \sum_{k=1}^{n} q_{nk} e_k$, atunci avem $y_n \in A$ şi $\|y_n - x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|q_{nk} - \alpha_k\right| \|e_k\| < 1/n$. Deci $\lim\limits_{n \to \infty} \|y_n - x_n\| = 0$.

Din inegalitățile $\|y_n - x\| \le \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\|$ rezultă $\lim_{n \to \infty} \|y_n - x\| = 0$. □

Exemplu. Spațiul liniar normat $\ell_{\mathbb{R}}$, fiind cu bază Schauder, este spațiu liniar normat separabil.

3.6. Spații Banach

Proprietăți elementare

În teoria spațiilor liniare normate, cele mai importante rezultate se obțin în cazul când este îndeplinită *condiția de completitudine*.

Reamintim că *un şir* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de elemente dintr-un spațiu liniar normat* $(X, \|\ \|)$ *se numeşte şir Cauchy dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un indice* $N(\varepsilon)$ *astfel încât* $n, m \ge N(\varepsilon)$ *implică* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Într-un spațiu liniar normat oricare şir convergent este şir Cauchy; reciproc nu este adevărat.

Definiție. Un spațiu liniar normat X în care oricare şir Cauchy este convergent se numeşte *spațiu liniar normat complet* sau *spațiu Banach*.

Observație. Proprietatea de completitudine se păstrează pentru submulțimile închise.

Propoziție. *Oricare subspațiu închis al unui spațiu Banach este spațiu Banach.*

Demonstrație. Oricare şir Cauchy de elemente dintr-un subspațiu liniar închis al unui spațiu Banach este şir convergent către un element din spațiul Banach.

Deoarece subspațiul liniar este închis, limita şirului aparține subspațiului.

Deci, subspațiul liniar închis este complet. □

Definiție. Fie $(X, \| \ \|)$ un spațiu liniar normat, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir de elemente din X şi $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$. Dacă există $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s \in X$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numeşte *serie convergentă*. Elementul s este *suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi se notează $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Şirul $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se numeşte *şirul sumelor parțiale*.

Dacă şirul sumelor parțiale nu este convergent, atunci seria se numeşte *divergentă*.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numeşte *absolut convergentă.*

Pentru a determina dacă un spațiu liniar normat este complet avem următorul criteriu.

Teorema 7. *Un spațiu liniar normat* $(X, \| \ \|)$ *este spațiu Banach dacă şi numai dacă oricare serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstrație. Fie X este spațiu liniar normat complet şi fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie absolut convergentă. Dacă $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$, atunci $\|s_n - s_m\| \le |\sigma_n - \sigma_m|$.

Deci, dacă $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ este şir Cauchy, atunci $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ este şir Cauchy.

Prin urmare, spațiul liniar normat X fiind complet, există $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s \in X$, adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

Reciproc, fie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir Cauchy în X. Atunci există un subşir $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ astfel încât $\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \dfrac{1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\|$ este convergentă.

Conform celor demonstrate în prima parte a teoremei, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right)$ este convergentă. Notăm $x = x_{k_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right)$. Deoarece:

$$x_{k_1} + \sum_{n=1}^{m-1} \left(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right) = x_{k_m} \quad (m \ge 2),$$

rezultă că subşirul $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ al şirului $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ este convergent. Prin urmare, şirul $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ este convergent. □

Teorema 8. *Dacă* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *sunt spații Banach, atunci spațiul liniar normat produs* $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$ *este spațiu Banach.*

Demonstrație. Avem de demonstrat numai completitudinea spațiului $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

Fie $\left\{x^m\right\}_{m=1}^{\infty}$ un şir Cauchy din spațiul liniar normat produs $X=\prod_{k=1}^{n} X_k$, unde $x^m=\left(x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn}\right)$, $(m=1,2,3,\cdots)$.

Pentru fiecare $\varepsilon>0$, există N_ε astfel încât $\left\|x^j-x^k\right\|<\varepsilon, \left(j, k>N_\varepsilon\right)$, de unde rezultă că $\left\|x_{ji}-x_{ki}\right\|<\varepsilon$, $\left(i=1,2,\cdots,n;\ j, k>N_\varepsilon\right)$. Atunci există $x_i \in X_i$, $i=1,2,\cdots,n$, asfet încât $x_i=\lim\limits_{k \to \infty} x_{ki}$.

Deci $\left\|x_{ji}-x_i\right\| \leq \varepsilon \ \left(i=1,2,\cdots,n;\ j>N_\varepsilon\right)$.

Notăm $x=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$.

În concluzie, oricare ar fi $\varepsilon>0$, există N_ε astfel încât $\left\|x^j-x\right\| \leq \varepsilon \ \left(j>N_\varepsilon\right)$, adică $\lim\limits_{m \to \infty} x^m=x$. □

Teorema 9. *Dacă X este un spațiu Banach şi X_0 un subspațiu liniar închis al lui X, atunci spațiul liniar normat cât X/X_0 este spațiu Banach.*

Demonstrație. Avem de demonstrat numai completitudinea spațiului X/X_0.

Fie $\left\{\hat{x}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ un şir Cauchy de elemente din X/X_0.

Din acest şir se poate extrage un subşir $\left\{\hat{x}_{k_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ astfel încât $\left\|\hat{x}_{k_{n+1}}-\hat{x}_{k_n}\right\|<\dfrac{1}{2^{n+1}}$, $(n=1,2,3,\cdots)$.

Din definiția normei în spațiul cât, rezultă că există $y_n \in \hat{x}_{k_{n+1}}-\hat{x}_{k_n}$ astfel încât $\left\|y_n\right\| \leq \left\|\hat{x}_{k_{n+1}}-\hat{x}_{k_n}\right\|<\dfrac{1}{2^n}$, pentru fiecare $n=1,2,3,\cdots$.

Rezultă că seria $x_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j$ este absolut convergentă şi, deci, este convergentă în spaţiul liniar normat complet X.

Fie $x = x_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j$. Demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$, unde $\hat{x}$ este clasa elementului $x \in X$. Fie $s_n = x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n-1} y_j$ $(n \geq 2)$. Este evident că $s_n \in \hat{x}_{k_n}$, $\left\|\hat{x}_{k_n} - \hat{x}\right\| \leq \left\|s_n - x\right\|$.

Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = x$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} \hat{x}_{k_n} = \hat{x}$.

Din inegalitățile $\left\|\hat{x}_n - \hat{x}\right\| \leq \left\|\hat{x}_n - \hat{x}_{k_n}\right\| + \left\|\hat{x}_{k_n} - \hat{x}\right\|$, ținând cont că $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ este şir Cauchy, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$. □

Familii sumabile în spații Banach

Definiție. Familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elemente ale spațiului liniar normat X se numeşte *sumabilă* dacă există $x \in X$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime finită $H_\varepsilon \subset I$, astfel încât pentru orice mulțime finită $H \subset I, H \supseteq H_\varepsilon$ are loc $\left\|x - \sum\limits_{i\in H} x_i\right\| < \varepsilon$.

Elementul x este atunci unic, se numeşte *suma familiei* $\{x_i\}_{i\in I}$ şi se notează $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Observații.

1) Orice familie finită este sumabilă, suma din definiția precedentă fiind cea algebrică.

2) Dacă $\{x_i\}_{i\in I}$ este o familie sumabilă, cu suma x, iar $f : I \to I$ este o bijecție, atunci familia $\left\{x_{f(i)}\right\}_{i\in I}$ este sumabilă şi are suma x.

3) Dacă $\{x_i\}_{i\in I}$ şi $\{y_i\}_{i\in I}$ sunt familii sumabile, iar $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, atunci familia $\{\alpha x_i+\beta y_i\}_{i\in I}$ este sumabilă şi avem:

$$\sum_{i\in I}\{\alpha x_i+\beta y_i\}=\alpha\sum_{i\in I}x_i+\beta\sum_{i\in I}y_i\ .$$

4) Familia de numere reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este sumabilă dacă şi numai dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n$ este absolut convergentă; suma familiei este suma uzuală a seriei.

5) Dacă familia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente ale unui spațiu liniar normat este sumabilă, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă şi $\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$.

6) O familie $\{x_i\}_{i\in I}$ de numere reale pozitive este sumabilă dacă şi numai dacă familia sumelor finite $\left\{\sum_{i\in F}x_i : F\subset I, F\ \textit{finită}\right\}$ este mărginită.

Are loc:

$$\sum_{i\in I}x_i=\sup\left\{\sum_{i\in F}x_i : F\subset I, F\ \textit{finită}\right\}.$$

Definiție. Familia $\{x_i\}_{i\in I}$ se numeşte *familie Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există o mulțime $F_\varepsilon\subset I$, F_ε finită, astfel încât, pentru orice mulțime $H\subset I$, H finită, cu proprietatea $H\cap F_\varepsilon=\varnothing$ avem $\left\|\sum_{i\in H}x_i\right\|<\varepsilon$.

Observație. Orice familie sumabilă este familie Cauchy.

Teorema 10 (Criteriul lui Cauchy). *Într-un spațiu Banach o familie este sumabilă dacă şi numai dacă este familie Cauchy.*

Demonstrație. Fie $\{x_i\}_{i\in I}$ o familie Cauchy în spațiul Banach X. Luând $\varepsilon = 1/2^n$ în definiția familiei Cauchy, se construieşte un şir $\{H_n\}_{n\geq 1}$ de mulțimi finite, $H_n \subset H_{n+1} \subset I$, astfel încât avem următoarea implicație:

$$H \subset I,\ H \text{ finită},\ H \cap H_n = \varnothing \text{ implică } \left\| \sum_{i\in H} x_i \right\| < \frac{1}{2^n}.$$

Fie $s_n = \sum\limits_{i\in H_n} x_i$. Şirul $\{s_n\}_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci convergent şi fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Atunci, familia $\{x_i\}_{i\in I}$ este sumabilă şi are suma x.

Am observat că reciproca este adevărată chiar dacă spațiul nu este spațiu Banach. □

Definiție. Familia $\{x_i\}_{i\in I}$ se numeşte absolut sumabilă, dacă familia $\{\|x_i\|\}_{i\in I}$ este sumabilă.

Teorema 11. *Într-un spațiu Banach orice familie absolut sumabilă este sumabilă.*

Demonstrație. Fie $\{x_i\}_{i\in I}$ o familie absolut sumabilă şi $H \subset I$, H finită.

Avem $\left\| \sum_{i\in H} x_i \right\| \leq \sum_{i\in H} \|x_i\|$.

Se aplică atunci criteriul lui Cauchy şi rezultă că familia $\{x_i\}_{i\in I}$ este sumabilă.

Din $\left\| \sum_{i\in H} x_i \right\| \leq \sum_{i\in H} \|x_i\|$ rezultă şi inegalitatea $\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|$. □

Observație. Fie X un spațiu liniar normat şi $\{x_i\}_{i\in I}$ o familie sumabilă. Atunci $\{i\in I: x_i\neq 0\}$ este o mulțime cel mult numărabilă.

Într-adevăr, mulțimea $\{i\in I: \|x_i\|\geq 1/n\}$ este finită $(n=1,2,3,\cdots)$. □

3.7. Exemple de spații Banach

1) Oricare spațiu liniar normat finit-dimensional este spațiu Banach.

2) *Fie spațiul liniar normat* $\left(\ell^p_{\mathbb{K}},\|\ \|_p\right)$ $(p\geq 1)$ *al şirurilor* $x=\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *din* $\mathbb{K}$ *astfel încât seria* $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p$ *este convergentă, unde norma este definită de:*

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\right)^{1/p}\qquad \left(x\in\ell^p_{\mathbb{K}}\right).$$

Atunci $\left(\ell^p_{\mathbb{K}},\|\ \|_p\right)$ *este spațiu Banach.*

Demonstrație. Faptul că $x\mapsto\|x\|_p$ este normă, rezultă din inegalitatea lui Minkowski pentru sume finite.

Fie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n=\{\alpha_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ $(n=1,2,3,\cdots)$, un şir Cauchy din spațiul $\ell^p_{\mathbb{K}}$. Fie $\varepsilon>0$. Atunci există un număr natural k_ε astfel încât $\|x_n-x_m\|_p<\varepsilon$ $(n,m>k_\varepsilon)$.

Rezultă că $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_{nj}-\alpha_{mj}\right|^p<\varepsilon^p\quad (n,m>k_\varepsilon)$;

în particular, $\left|\alpha_{nj}-\alpha_{mj}\right|<\varepsilon\ \left(n,m>k_\varepsilon, j=1,2,3,\cdots\right)$. Deci există $\alpha_j=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{nj}\ \left(j=1,2,3,\cdots\right)$.

Fie $x=\left(\alpha_j\right)_{j\geq 1}$. Deducem că $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_{nj}-\alpha_j\right|^p<\varepsilon^p\ \left(n>k_\varepsilon\right)$, de unde rezultă că $x_n-x\in\ell_{\mathbb{K}}^p\ \left(n>k_\varepsilon\right)$. Astfel, avem $x\in\ell_{\mathbb{K}}^p$.

În concluzie, pentru oricare $\varepsilon>0$, există k_ε, astfel încât $\left\|x_n-x\right\|_p<\varepsilon\ \left(n>k_\varepsilon\right)$, adică $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. □

3) *Fie spațiul liniar normat* $\left(C_{\mathbb{R}}^p\left(\left[a,b\right]\right),\|\ \|\right)$, $\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$, $p=1,2,3,\cdots$, *al funcțiilor reale continue* $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$, *care admit derivate continue de ordinul* k $\left(1\leq k\leq p\right)$, *cu norma definită de* $\|f\|=\sum\limits_{k=0}^{p}\max\limits_{t\in[a,b]}\left|f^{(k)}(t)\right|\quad\left(f\in C_{\mathbb{R}}^p\left(\left[a,b\right]\right)\right)$.

Atunci $\left(C_{\mathbb{R}}^p\left(\left[a,b\right]\right),\|\ \|\right)$ *este spațiu Banach.*

Demonstrație. Convergența în normă a unui şir $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ de funcții din spațiul $\left(C_{\mathbb{R}}^p\left(\left[a,b\right]\right),\|\ \|\right)$ este echivalentă cu convergența uniformă a şirului $\left\{f_n^{(k)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left(k=0,1,2,\cdots,p\right)$.

Vom arăta că spațiul $\left(C_{\mathbb{R}}^p\left(\left[a,b\right]\right),\|\ \|\right)$ este complet. Fie $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{\mathbb{R}}^p\left(\left[a,b\right]\right)$ un şir Cauchy. Din următoarele inegalități: $\left|f_m^{(k)}(t)-f_n^{(k)}(t)\right|\leq\left\|f_m-f_n\right\|$ $\left(k=0,1,2,\cdots,p\right)$, rezultă că, pentru fiecare k, şirul $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniform către o funcție

continuă g_k. De aici deducem imediat că $g_k(t) = g_0^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, 3, \cdots, p)$, adică $g_0 \in C_{\mathbb{R}}^p([a,b])$ şi astfel $g_0 = \lim_{n \to \infty} f_n$. □

4) *Spațiul* $\left(L_{\mathbb{K}}^p([a,b]), \| \ \|_p\right)$ $\left([a,b] \subset \mathbb{R}, p \geq 1\right)$ *este spațiu Banach.*

Demonstrație. Reamintim, mai întâi, câteva noțiuni.

O funcție $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ măsurabilă Lebesgue se numeşte p*-integrabilă* dacă funcția $|f|^p$ este integrabilă Lebesgue, unde $|f|^p(t) = |f(t)|^p$ $(t \in [a,b])$.

Din inegalitățile:

$$|f + g|^p \leq \left(2 \sup\{|f|, |g|\}\right)^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right),$$

rezultă că:

dacă f *şi* g *sunt funcții* p*-integrabile, atunci funcția* $f + g$ *este* p*-integrabilă.*

Rezultă, de asemenea, că:

dacă f *este funcție* p*-integrabilă, atunci* αf $(\alpha \in \mathbb{K})$ *este* p*–integrabilă.*

Fie $p > 1$ şi $q > 1$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Atunci $|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K})$.

Fie f şi g două funcții.

Dacă f este p-integrabilă şi g este q-integrabilă, atunci fg este integrabilă, deoarece:

$$|fg| = |f| \cdot |g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Dacă, în inegalitatea de mai sus, punem:

$$\alpha = \frac{|f(t)|}{\left(\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}} \text{ şi } \beta = \frac{|g(t)|}{\left(\int\limits_{[a,b]} |g(t)|^q dt\right)^{1/q}},$$

obținem inegalitatea următoare:

$$\frac{|f(t)|}{\left(\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}} \cdot \frac{|g(t)|}{\left(\int\limits_{[a,b]} |g(t)|^q dt\right)^{1/q}} \le$$

$$\le \frac{|f(t)|^p}{p \cdot \int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p dt} + \frac{|g(t)|^q}{q \cdot \int\limits_{[a,b]} |g(t)|^q dt}.$$

Integrăm această inegalitate şi avem:

$$\frac{\int\limits_{[a,b]} |f(t)| \cdot |g(t)| dt}{\left(\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_{[a,b]} |g(t)|^q dt\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

de unde rezultă:

$$\int\limits_{[a,b]} |f(t) g(t)| dt \le \left(\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_{[a,b]} |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

(Inegalitatea lui Hölder)

Fie f şi g funcții p-integrabile.

Atunci funcția $f+g$ este p-integrabilă şi $|f+g|^{p-1}$ este q-integrabilă.

În continuare, folosind inegalitatea lui Hölder, demonstrăm inegalitatea următoare:

$$\left(\int_{[a,b]} \left|f(t)+g(t)\right|^p\right)^{1/p} dt \le \left(\int_{[a,b]} \left|f(t)\right|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_{[a,b]} \left|g(t)\right|^p dt\right)^{1/p}.$$

(Inegalitatea lui Minkowski)

Avem inegalitățile:

$$|f+g|^p = |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} \le |f|\cdot|f+g|^{p-1} + |g|\cdot|f+g|^{p-1}.$$

Integrând și aplicând inegalitatea lui Hölder, obținem inegalitățile următoare:

$$\int_{[a,b]} \left|f(t)+g(t)\right|^p dt \le$$

$$\le \int_{[a,b]} |f(t)|\cdot|f(t)+g(t)|^{p-1} dt + \int_{[a,b]} |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|g(t)|\, dt \le$$

$$\le \left(\int_{[a,b]} |f(t)+g(t)|^{(p-1)q} dt\right)^{1/q} \cdot \left(\int_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{[a,b]} |f(t)+g(t)|^{(p-1)q} dt\right)^{1/q} \cdot \left(\int_{[a,b]} |g(t)|^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{[a,b]} |f(t)+g(t)|^{(p-1)q} dt\right)^{1/q} \cdot \left\{\left(\int_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_{[a,b]} |g(t)|^p dt\right)^{1/p}\right\} =$$

$$= \left(\int_{[a,b]} |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q} \cdot \left\{\left(\int_{[a,b]} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_{[a,b]} |g(t)|^p dt\right)^{1/p}\right\}.$$

De aici rezultă *inegalitatea lui Minkowski:*

$$\left(\int_{[a,b]} \left|f(t)+g(t)\right|^p\right)^{1/p} dt \le \left(\int_{[a,b]} \left|f(t)\right|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_{[a,b]} \left|g(t)\right|^p dt\right)^{1/p}. \blacksquare$$

În continuare, definim o relație de echivalență în mulțimea funcțiilor p-integrabile. Fie f și g funcții p-integrabile.

Funcțiile f şi g sunt echivalente, $f \sim g$, dacă şi numai dacă $f(t) = g(t)$ $a.p.t.$

Notăm cu $L^p_{\mathbb{K}}([a,b])$ mulțimea tuturor claselor de echivalență.

Convenim să notăm tot cu f clasa de echivalență determinată de f.

Ştim că mulțimea $L^p_{\mathbb{K}}([a,b])$, cu operațiile de adunare şi înmulțire cu scalari, este spațiu liniar.

Dacă definim:

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \quad \left(f \in L^p_{\mathbb{K}}([a,b])\right),$$

atunci, din proprietățile integralei Lebesgue şi din inegalitatea lui Minkowski, rezultă că $\| \ \|_p$ este normă pe $L^p_{\mathbb{K}}([a,b])$.

Astfel, $\left(L^p_{\mathbb{K}}([a,b]), \| \ \|_p\right)$ este spațiu liniar normat.

Convergența în normă în $L^p_{\mathbb{K}}([a,b])$ este numită *convergența în medie de ordinul* p.

Avem echivalența:

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)|^p \, dt = 0 .$$

Să arătăm că spațiul liniar normat $\left(L^p_{\mathbb{K}}([a,b]), \| \ \|_p\right)$ este complet. Fie $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir Cauchy din spațiul $L^p_{\mathbb{K}}([a,b])$. Pentru fiecare n fie h_n un număr natural astfel încât $\|f_j - f_k\|_p < 1/2^n$ $(j,k \geq h_n)$. (Putem considera că şirul $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$

este crescător). Avem $\left\| f_{h_{n+1}} - f_{h_n} \right\|_p < 1/2^n$, de unde rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_{h_{n+1}} - f_{h_n} \right\|_p$ este convergentă.

Apoi, dacă scriem inegalitatea lui Hölder pentru funcțiile $f_{h_{n+1}} - f_{h_n}$ şi 1, obținem inegalitatea următoare:

$$\int_{[a,b]} \left| f_{h_{n+1}}(t) - f_{h_n}(t) \right| dt < (b-a)^{1/q} \left\| f_{h_{n+1}} - f_{h_n} \right\|_p .$$

Astfel, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} \left| f_{h_{n+1}}(t) - f_{h_n}(t) \right| dt$ este convergentă şi, în consecință, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_{h_{n+1}}(t) - f_{h_n}(t) \right|$ este convergentă aproape peste tot.

Deoarece $f_{h_{n+1}}(t) = f_{h_1}(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(f_{h_{i+1}}(t) - f_{h_i}(t) \right)$, rezultă că şirul $\left\{ f_{h_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge aproape peste tot.

Atunci funcția $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_{h_n}(t)$ $a.p.t.$ este măsurabilă.

Fie $\varepsilon > 0$ şi k_ε număr natural astfel încât $\left\| f_m - f_j \right\|_p < \varepsilon$ $(m, j \geq k_\varepsilon)$. Fie n_0 astfel încât $h_{n_0} > k_\varepsilon$. Pentru $m > k_\varepsilon$ şi $n > n_0$, avem $\int_{[a,b]} \left| f_{h_m}(t) - f_{h_n}(t) \right|^p dt < \varepsilon^p$. Rezultă că $\left| f_m - f \right|^p$ este integrabilă şi $\int_{[a,b]} \left| f_m(t) - f(t) \right| dt < \varepsilon^p$.

În concluzie, f este p-integrabilă şi $\left\| f_n - f \right\| < \varepsilon$. □

5) Fie spațiul liniar normat $\left(m_{\mathbb{K}}, \| \ \| \right)$ al şirurilor mărginite $x = \left\{ \alpha_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ de elemente din $\mathbb{K}$, cu norma

$\|x\| = \sup\{|\alpha_n| : n = 1,2,3,\cdots\}$. Atunci $(m_{\mathbb{K}}, \| \ \|)$ este spațiu Banach.

Spațiul $m_{\mathbb{K}}$ se mai notează $\ell^{\infty}_{\mathbb{K}}$. □

6) Fie spațiul liniar normat $(C_{\mathbb{K}}([a,b]), \| \ \|)$, $[a,b] \subset \mathbb{K}$, al funcțiilor continue $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, cu norma definită de:

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \quad (f \in C_{\mathbb{K}}([a,b])).$$

Atunci $(C_{\mathbb{K}}([a,b]), \| \ \|)$ este spațiu Banach. □

Exemplu. Spațiul liniar normat $C([-1,1], \| \ \|_1)$, cu norma definită prin $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$, nu este spațiu Banach.

Justificare. Şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definit de:

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, \ dacă \ t \in [0,1], \\ (-t)^{1/n}, \ dacă \ t \in [-1,0]. \end{cases}$$

este şir Cauchy în raport cu norma $\| \ \|_1$.

Presupunem că şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ este convergent la f. Există un subşir convergent a.p.t. la f. Dar $f_n \to g \ a.p.t.$, unde:

$$g(t) = \begin{cases} 0, \ dacă \ t \in (0,1], \\ 1, \ dacă \ t \in [-1,0). \end{cases}$$

Atunci funcția continuă *f* este egală aproape peste tot cu g (contradicție!).

7) Fie X o mulțime, $\mathcal{A}$ o σ-algebră de submulțimi ale lui X şi $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ o măsură. Fie $f : X \to \mathbb{K}$ o funcție măsurabilă. Definim *supremum esențial*:

$$ess\sup(f) = \inf\left\{\sup_{x\in X\setminus E}|f(x)| : E \subset X, \mu(E) = 0\right\}$$

sau, echivalent,

$$ess\sup = \inf\left\{\sup_{x\in X}|g(x)| : g \sim f\right\},$$

unde $g \sim f$ înseamnă că $g : X \to \mathbb{K}$ este o funcție măsurabilă egală cu f aproape peste tot.

Relația $\sim$ este o relație de echivalență.

Notăm cu $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ mulțimea tuturor claselor de echivalență ale funcțiilor f cu $ess\sup(f) < \infty$.

Cu norma $\|f\|_\infty = ess\sup(f)$, spațiul $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ devine spațiu Banach.

În cazul $X = \mathbb{N}$, cu măsura de numărare, L^∞ este ℓ^∞, iar pentru $X = [a,b]$ sau $X = \mathbb{R}$, cu măsura Lebesgue, avem spațiile $L^\infty([a,b])$ respectiv, $L^\infty(\mathbb{R})$. □ ▪

4

OPERATORI LINIARI ŞI CONTINUI

4.1. Operatori liniari şi continui

Fie X şi Y spaţii liniare normate peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

Definiţie. O aplicaţie $T : X \to Y$ se numeşte *operator liniar* dacă are proprietatea:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \ \left(x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\right).$$

Definiţie. Operatorul liniar $T : X \to Y$ se numeşte *mărginit* dacă există $M > 0$ astfel încât:

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \ \left(x \in X\right).$$

Prin definiţie, $\|T\| = \inf\left\{M : \|T(x)\| \leq M\|x\|,\ \left(x \in X\right)\right\}$.

Propoziţie. *Dacă* $T : X \to Y$ *este un operator liniar mărginit, atunci*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

Demonstrație. Observăm că dacă $\|x\| \le 1$ şi $x \neq 0$, atunci $\|T(x)\| \le \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|\frac{T(x)}{\|x\|}\right\|$. □

Observații.

1) Dacă $T : X \to Y$ este un operator liniar mărginit, atunci $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\| \ (x \in X)$.

2) Un operator liniar mărginit $T : X \to Y$ aplică oricare mulțime mărginită din X într-o mulțime mărginită din Y.

3) Un operator liniar mărginit $T : X \to Y$ aplică bila unitate din X în bila de rază $\|T\|$ din Y.

O consecință a structurii liniare a spațiilor X şi Y este următoarea teoremă de bază.

Teoremă. *Dacă $T : X \to Y$ este un operator liniar definit pe spațiul liniar normat X cu valori în spațiul liniar normat Y, atunci următoarele proprietăți ale lui T sunt echivalente:*

i) T este continuu (pe X);

ii) T este continuu în 0;

iii) T este mărginit.

Demonstrație. Este evident că $(i) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că T este continuu în $x = 0$. Atunci, pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât $\|x\| < \delta$ implică $\|T(x)\| < \varepsilon$. Fie $x \in X$, $x \neq 0$. Dacă notăm $z = \frac{\delta}{2\|x\|}x$, atunci $\|z\| = \left\|\frac{\delta}{2\|x\|}x\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ şi, deci $\|T(z)\| < \varepsilon$.

Deoarece avem $\left\|T(z)\right\| = \dfrac{\delta\left\|T(x)\right\|}{2\|x\|}$, obținem imediat că

$$\left\|T(x)\right\| = \frac{2\|x\|\left\|T(z)\right\|}{\delta} < \frac{2\|x\|\varepsilon}{\delta}.$$

Deci $\left\|T(x)\right\| \le \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\|x\| \ (x \in X)$, adică T este mărginit.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Din liniaritatea operatorului T, avem $\left\|T(x) - T(y)\right\| = \left\|T(x - y)\right\| \le M\|x - y\|$ pentru oricare $x, y \in X$, de unde rezultă imediat continuitatea lui T. □

Observații.

1) O demonstrație alternativă a implicației $ii) \Rightarrow iii)$ din teorema precedentă este următoarea.

Presupunem că T este continuu în 0, dar nu este mărginit. Atunci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in X$ astfel încât $\left\|T(x_n)\right\| > n\|x_n\|$. Este evident că $x_n \ne 0$.

Notăm $z_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ în X și

$$\left\|T(z_n)\right\| = \frac{\left\|T(x_n)\right\|}{n\|x_n\|} > 1.$$

Aceasta contrazice continuitatea lui T în 0. □

2) Pentru a stabili continuitatea unui operator liniar este suficient să arătăm continuitatea lui în origine ori mărginirea lui.

Mulțimea operatorilor liniari mărginiți dintr-un spațiu liniar normat X într-un spațiu liniar normat Y se notează $\mathcal{L}(X, Y)$. Dacă $X = Y$, scriem $\mathcal{L}(X)$ în loc de $\mathcal{L}(X, X)$.

Propoziție. *Dacă* X *şi* Y *sunt spații liniare normate, atunci* $\mathcal{L}(X,Y)$ *este spațiu liniar normat.*

Demonstrație. Fie $S,T \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Atunci $\alpha S+\beta T$ este operator liniar şi mărginit deoarece, pentru oricare $x \in X$, avem:

$$\begin{aligned}\|(\alpha S+\beta T)(x)\| &= \|\alpha S(x)+\beta T(x)\| \\ &\le \|\alpha S(x)\|+\|\beta T(x)\| \\ &= |\alpha|\|S(x)\|+|\beta|\|T(x)\| \\ &\le (|\alpha|\|S\|+|\beta|\|T\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Astfel, $\mathcal{L}(X,Y)$ este spațiu liniar.

Pentru a arăta că $\|\cdot\|$ este normă pe $\mathcal{L}(X,Y)$, notăm mai întâi că $\|T\| \ge 0$, din definiție. Dacă $\|T\|=0$, atunci $0=\|T\|=\sup\left\{\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \ne 0\right\}$, care implică $T(x)=0$ pentru oricare $x \in X$, adică $T=0$. Fie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$. Atunci:

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= \sup\{\|(\alpha T)(x)\| : \|x\| \le 1\} \\ &= \sup\{\|\alpha T(x)\| : \|x\| \le 1\} \\ &= \sup\{|\alpha|\|T(x)\| : \|x\| \le 1\} \\ &= |\alpha|\sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\} \\ &= |\alpha|\|T\|.\end{aligned}$$

În fine, fie $S,T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Atunci:

$$\begin{aligned}\|S+T\| &= \sup\{\|(S+T)(x)\| : \|x\|\le 1\}\\ &= \sup\{\|S(x)+T(x)\| : \|x\|\le 1\}\\ &\le \sup\{\|S(x)\|+\|T(x)\| : \|x\|\le 1\}\\ &\le \sup\{(\|S\|+\|T\|)\|x\| : \|x\|\le 1\}\\ &= \|S\|+\|T\|.\end{aligned}$$

Demonstrația este completă. □

Propoziție. *Dacă X este spațiu liniar normat şi Y este spațiu Banach, atunci $\mathcal{L}(X,Y)$ este spațiu Banach.*

Demonstrație. Fie $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir Cauchy din $\mathcal{L}(X,Y)$. Fie $\varepsilon>0$. Există un număr N astfel încât dacă $n,m\ge N$, atunci $\|T_n-T_m\|\le\varepsilon$. Astfel, dacă $x\in X$, atunci:

$$\|T_n(x)-T_m(x)\|\le\|T_n-T_m\|\|x\|\le\varepsilon\|x\| \ (n,m\ge N).$$

De aici rezultă că şirul $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ este şir Cauchy în Y. Spațiul Y fiind complet, există limita $T(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)$ pentru fiecare $x\in X$. Observăm că aplicația T este liniară:

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y) &= \lim_{n\to\infty}T_n(\alpha x+\beta y)\\ &= \lim_{n\to\infty}(T_n(\alpha x)+T_n(\beta y))\\ &= \lim_{n\to\infty}(\alpha T_n(x)+\beta T_n(y))\\ &= \alpha\lim_{n\to\infty}T_n(x)+\beta\lim_{n\to\infty}T_n(y)\\ &= \alpha T(x)+\beta T(y).\end{aligned}$$

Vom arăta că aplicația T este continuă. Şirul $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ fiind Cauchy este mărginit: există $M > 0$ astfel încât $\|T_n\| \le M$.

Atunci, $\|T_n(x)\| \le M\|x\|$ pentru oricare n şi oricare $x \in X$. Trecând la limită, rezultă că $\|T(x)\| \le M\|x\|$ $(x \in X)$, adică T este mărginit.

În fine, arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0$. Din inegalitatea $\|T_n(x) - T_m(x)\| \le \varepsilon\|x\|$ $(n, m \ge N)$, adevărată pentru oricare $x \in X$, pentru $m \to \infty$, obținem $\|T_n(x) - T(x)\| \le \varepsilon\|x\|$ $(n \ge N)$. Aceasta înseamnă că avem $\|T_n - T\| \le \varepsilon$ $(n \ge N)$. □

Corolar. *Fie X un spațiu liniar normat peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Atunci spațiul liniar normat $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, respectiv $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, este spațiu Banach.*

Spațiul Banach $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, respectiv $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, se numeşte *spațiu dual* al spațiului liniar normat X şi este notat X' sau X^*.

Propoziție. *Fie X, Y, Z spații normate peste corpul $\mathbb{K}$. Fie $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi $V \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Atunci $V \circ U \in \mathcal{L}(X,Z)$ şi $\|V \circ U\| \le \|V\|\|U\|$.*

Demonstrație. Exercițiu. □

Corolar. *Fie $U_n, U \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi $V_n, V \in \mathcal{L}(Y,Z)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \circ V_n = U \circ V$.*

Demonstrație. Din propoziția precedentă şi egalitatea următoare $V_n \circ U_n - V \circ U = V_n \circ (U_n - U) + (V_n - V) \circ U$, rezultă inegalitatea $\|V_n \circ U_n - V \circ U\| \le \|V_n\| \|U_n - U\| + \|V_n - V\| \|U\|$.

Afirmația rezultă folosind mărginirea şirului $(\|V_n\|)_{n\ge 1}$. □

Observație. Vom spune că afirmația conținută în corolar exprimă *continuitatea operației de compunere a operatorilor liniari şi continui.*

Exemple.

1). Aplicația liniară $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $A(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$, este mărginită şi are norma $\|A\| = |a|$.

2). Aplicația identitate $I : X \to X$, $I(x) = x$, $\forall\ x \in X$, este mărginită şi are norma $\|I\| = 1$ pe oricare spațiu liniar normat X.

3). Fie $C^\infty([0,1])$ spațiul funcțiilor continue cu derivate de toate ordinele continue, cu norma maximum.
($C^\infty([0,1])$ este spațiu liniar normat, dar nu este spațiu Banach).

Operatorul diferențial $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$, definit prin $D(f) = f'$, $f \in C^\infty([0,1])$, este nemărginit.

Fie $u(x) = e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Atunci $D(u) = \lambda u$.

Astfel $\|D(u)\| / \|u\| = |\lambda|$ poate fi oricât de mare.

4). Fie ℓ^∞ spațiul şirurilor mărginite $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, cu norma $\|x\|_\infty = \sup\{ |x_n| : n = 1,2,3,\cdots \}$.

O aplicație liniară $A:\ell^{\infty}\to\ell^{\infty}$ este reprezentată printr-o matrice infinită $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{\infty}$, unde $\left(Ax\right)_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j$, cu condițiile $\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|<\infty$ pentru fiecare $i\in\mathbb{N}$ şi $\sup_{i\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|\right\}<\infty$. Atunci A este operator liniar şi mărginit pe ℓ^{∞} şi are norma $\left\|A\right\|_{\infty}=\sup_{i\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|\right\}$.

5). Fie spațiul liniar $C\left(\left[0,1\right]\right)$ cu norma maximum. Fie $k:\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.

Fie $K:C\left(\left[0,1\right]\right)\to C\left(\left[0,1\right]\right)$ definit prin:

$$K\left(f\right)\left(x\right)=\int_0^1 k\left(x,y\right)f\left(y\right)dy .$$

(*Operatorul integral Fredholm*)

Atunci K este operator liniar, mărginit şi are norma $\left\|K\right\|=\max_{0\le x\le 1}\int_0^1\left|k\left(x,y\right)\right|dy$.

6). Fie spațiul liniar $C\left(\left[0,1\right]\right)$ cu norma maximum.

Fie $K:C\left(\left[0,1\right]\right)\to C\left(\left[0,1\right]\right)$ definit prin:

$$K\left(f\right)\left(x\right)=\int_0^x f\left(y\right)dy .$$

(*Operatorul integral Volterra*)

Atunci K este operator liniar şi mărginit:

$$\left\|K\left(f\right)\right\|\le\sup_{0\le x\le 1}\int_0^x\left|f\left(y\right)\right|dy\le\int_0^1\left|f\left(y\right)\right|dy\le\left\|f\right\| .$$

Deci $\left\|K\right\|\le 1$. Dar, $K\left(1\right)=x$ şi $\left\|x\right\|=\left\|1\right\|$, deci $\left\|K\right\|=1$.

7). Fie spațiul liniar normat $L^2([a,b])$ al tuturor funcțiilor complexe măsurabile Lebesgue, de pătrat integrabil pe $[a,b]$, cu norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$.

Fie o funcție $\varphi \in C([a,b])$, fixată.

Fie aplicația $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ definită prin:

$$(T(f))(t) = \varphi(t) f(t) dt \ , \ \forall \ t \in [a,b].$$

Este uşor de verificat că aplicația T este liniară.

Pentru fiecare $f \in L^2([a,b])$, avem:

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^2 &= \int_a^b |\varphi(t) f(t)|^2 \, dt \\ &\le \left(\sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| \right)^2 \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \\ &= \left(\sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| \right)^2 \|f\|^2 . \end{aligned}$$

Rezultă că T este aplicație mărginită:

$$\|T(f)\| \le M \|f\| \ \left(f \in L^2([a,b]) \right) \text{ cu } M = \|\varphi\|_\infty .$$

8). Fie $(\lambda_n)_n$ un şir de numere şi $U : \ell^1 \to s$, $U(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n, \cdots)$. Atunci:

i) $U(\ell^1) \subset \ell^1$ dacă şi numai dacă $(\lambda_n)_n$ este mărginit;

ii) Dacă $(\lambda_n)_n$ este mărginit, atunci $U \in \mathcal{L}(\ell^1)$ şi $\|U\| = \sup_{n\ge1} |\lambda_n|$. □

4.2. Principiul mărginirii uniforme

Fie X şi Y spații liniare normate peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

Definiție. Mulțimea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ se numeşte *punctual mărginită* dacă pentru orice $x \in X$ mulțimea $\{U_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ este mărginită în Y.

Observații.

1) Mulțimea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este punctual mărginită dacă pentru orice $x \in X$, există $M_\alpha > 0$ astfel încât $\|U_\alpha(x)\| \le M_\alpha \ (x \in X)$.

2) Dacă mulțimea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este mărginită în $\mathcal{L}(X,Y)$, adică dacă există $M > 0$ astfel încât $\|U_\alpha\| \le M$ pentru orice $\alpha \in A$, atunci ea este punctual mărginită. Într-adevăr, aceasta rezultă din $\|U_\alpha(x)\| \le \|U_\alpha\|\|x\| \ (x \in X)$.

Teorema 2 (Principiul mărginirii uniforme). *Fie X şi Y spații liniare normate, X spațiu Banach şi $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ o familie punctual mărginită. Atunci mulțimea $\{\|U_\alpha\|\}_{\alpha\in A}$ este mărginită.*

Demonstrație. Fie $X_n = \{x \in X : \|U_\alpha(x)\| \le n, \forall \alpha \in A\}$. Conform ipotezei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Din continuitatea operatorilor şi a normei, rezultă că fiecare din mulțimile X_n este închisă.

Spațiul X fiind de categoria a doua Baire, există atunci $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\operatorname{Int} X_{n_0} \neq \varnothing$.

Notăm $D = \operatorname{Int} X_{n_0}$. Atunci mulțimea D este deschisă şi deci $D - D$ este o vecinătate a originii.

Avem $D - D \subset X_{n_0} - X_{n_0}$, iar dacă $r > 0$ este astfel încât $\overline{B}(0,r) \subset D - D$, avem $\overline{B}(0,r) \subset X_{n_0} - X_{n_0}$. Aceasta înseamnă că dacă $\|x\| \leq r$, atunci $x = y - z$, $y, z \in X_{n_0}$, adică $\|U_\alpha(y)\| \leq n_0$, $\|U_\alpha(z)\| \leq n_0$, pentru orice $\alpha \in A$.

Avem deci că $\|x\| \leq r$ implică $\|U_\alpha(x)\| \leq 2n_0$, de unde rezultă că $\|U_\alpha(x)\| \leq \dfrac{2n_0}{r}\|x\|$ $(x \in X, \alpha \in A)$.

Atunci $\|U_\alpha\| \leq \dfrac{2n_0}{r}$ $(\alpha \in A)$, adică familia $\left\{ \|U_\alpha\| \right\}_{\alpha \in A}$ este mărginită. □

Corolar (Teorema Banach-Steinhauss). *Fie X şi Y spații liniare normate, X spațiu Banach şi $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de operatori liniari şi continui $U_n : X \to Y$ astfel încât pentru orice $x \in X$, şirul $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. Fie $U : X \to Y$, $U(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$ $(x \in X)$. Atunci U este liniar, continuu şi $\|U\| = \liminf\limits_{n\to\infty} \|U_n\|$.*

Demonstrație. Este evident că operatorul U este liniar. Şirul $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ fiind convergent, este mărginit, adică şirul $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este punctual mărginit.

Conform principiului mărginirii uniforme, există $M > 0$ astfel încât $\|U_n\| \le M \ (n \in \mathbb{N})$.

Atunci $\|U_n(x)\| \le M\|x\|$ şi deci $\|U(x)\| \le M\|x\|$, adică operatorul U este continuu.

Apoi avem:

$$\|U(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|U_n(x)\| = \liminf_{n\to\infty}\|U_n(x)\| \le \liminf_{n\to\infty}\|U_n\|\|x\|,$$

deci $\|U\| \le \liminf_{n\to\infty}\|U_n\|$. □

Observație. Principiul mărginirii uniforme nu este adevărat dacă X nu este spațiu Banach.

Justificare. Considerăm pentru aceasta spațiul liniar $s_0 = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \exists\, j, x_k = 0,\ \forall k \ge j\right\}$, cu norma $\|x\| = \max_k |x_k|$. Fie $f_n : s_0 \to \mathbb{R}$ definită prin $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Este evident că funcționala f_n este liniară.

Din $|f_n(x)| \le n\|x\|$, rezultă că f_n este continuă, iar din $f_n(u_n) = n$, unde $u_n = (1,\cdots,1,0,\cdots)$ cu 1 de n ori, rezultă $\|f_n\| = n$.

Şirul $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ este totuşi punctual mărginit: $|f_n(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Explicația faptului că nu acționează principiul mărginirii uniforme este aceea că $(s_0, \|\ \|)$ nu este spațiu Banach (de fapt, în raport cu orice normă, s_0 este de categoria întâi Baire). □

4.3. Operatori inversabili

Fie X şi Y spaţii liniare normate.

Definiţie. Operatorul $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ se numeşte *inversabil* dacă există $V \in \mathcal{L}(Y,X)$ astfel încât $U \circ V = I_Y$ şi $V \circ U = I_X$, unde I_X şi I_Y sunt operatorii identitate pe X, respectiv pe Y.

Se notează atunci $V = U^{-1}$ şi se numeşte *inversul* lui U (în categoria operatorilor liniari şi continui).

Se observă deci că U este inversabil în sensul definiţiei precedente dacă şi numai dacă este o bijecţie (deci dacă este inversabil în categoria funcţiilor de la X la Y), iar inversul, care este evident liniar, este şi continuu.

Deci, existenţa unui operator inversabil în $\mathcal{L}(X,Y)$ nu este posibilă dacă spaţiile X şi Y nu sunt izomorfe ca spaţii liniare.

Propoziţia 1. *Operatorul $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ este inversabil dacă şi numai dacă este surjectiv şi există $M > 0$ astfel încât:*

$$\|U(x)\| \geq M\|x\| \quad (x \in X).$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă are loc inegalitatea $\|U(x)\| \geq M\|x\|$, $x \in X$, atunci U este injectiv şi, cum este presupus surjectiv, este inversabil în clasa funcţiilor.

Inversul lui U este liniar, iar $\|U(x)\| \geq M\|x\|$ $(x \in X)$ exprimă continuitatea acestui invers. □

Teorema următoare descrie o clasă importantă de operatori inversabili în cazul în care X este spațiu Banach şi $Y = X$.

Teorema 3 (Lema lui von Neumann). *Fie X un spațiu Banach, $U \in \mathcal{L}(X)$ astfel încât $\|U\| < 1$. Atunci $I - U$ este inversabil, $(I-U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U^n$ şi $\left\|(I-U)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|U\|}$.*

Demonstrație. Fie $f : X \to X$, $f(x) = U(x) + y$. Funcția este o contracție şi deci există şi este unic $z \in X$, $f(z) = z$, adică $(I-U)(x) = y$. Aceasta arată că $I-U$ este o bijecție. Fie V inversul lui $I-U$ în clasa funcțiilor. Atunci V este liniar.

Din $V(x) - U(V(x)) = x$ rezultă că $\|V(x)\| \le \frac{1}{1-\|U\|}\|x\|$. Atunci V este continuu şi $\|V\| \le \frac{1}{1-\|U\|}$. Atunci $V = (I-U)^{-1}$, $V \in \mathcal{L}(X)$. Din $\|U^n\| \le \|U\|^n$ şi ipoteză rezultă că seria $\sum_{n\ge 0} U^n$ este absolut convergentă. Spațiul $\mathcal{L}(X)$ fiind spațiu Banach, rezultă că seria $\sum_{n\ge 0} U^n$ este convergentă. Fie $T \in \mathcal{L}(X)$, $T = \sum_{n=0}^{\infty} U^n$, adică $T = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} U^k$.

Folosind şi continuitatea operației de compunere avem $(I-U) \circ T = \lim_{n\to\infty} (I-U) \sum_{k=0}^{n} U^k = \lim_{n\to\infty} \left(I - U^{n+1}\right) = I$. Analog se arată că $T \circ (I-U) = I$ şi prin urmare $(I-U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U^n$. □

Observație. Cu ipoteze naturale, $(W \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ W^{-1}$.

4.4. Operatori deschişi

Fie X şi Y spaţii liniare normate peste acelaşi corp $\mathbb{K}$.

Definiţie. Operatorul $U : X \to Y$ se numeşte *deschis* (*aplicaţie deschisă*), dacă pentru orice mulţime deschisă G din X, mulţimea $U(G)$ este deschisă în Y.

Observaţii.

1) Dacă $U \in \mathcal{L}(X)$ este un operator inversabil, atunci este operator deschis.

Într-adevăr, $U(G) = \left(U^{-1}\right)^{-1}(G)$, iar U^{-1} este continuu.

2) Dacă $U \in \mathcal{L}(X)$ este deschis, atunci el este surjectiv.

Într-adevăr, dacă $G = B(0,r)$, atunci $U(G)$ este deschisă şi conţine elementul nul, deci există $B(0,r) \subset U(G)$.

Rezultă că $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU(G) = U(X)$. □

Lemă. *Fie* X *şi* Y *spaţii spaţii liniare normate,* Y *spaţiu Banach şi* $U : X \to Y$ *un operator liniar şi surjectiv. Atunci, pentru orice* $r > 0$*, mulţimea* $\overline{U(B(0,r))}$ *este o vecinătate a originii în* Y.

Demonstraţie. Din ipoteză şi din $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,nr/2)$, rezultă că $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU(B(0,r/2))$.

Conform teoremei lui Baire rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\operatorname{Int}\left(\overline{n_0 U(B(0,r/2))}\right) \neq \varnothing$.

Atunci $\operatorname{Int}\overline{U\left(B\left(0,r/2\right)\right)} \neq \varnothing$ (operația de înmulțire cu scalarul n_0 este un homeomorfism).

Fie $D = \operatorname{Int}\overline{U\left(B\left(0,r/2\right)\right)}$. Avem:

$$\begin{aligned} D-D & \subset \overline{U\left(B\left(0,\frac{r}{2}\right)\right)} - \overline{U\left(B\left(0,\frac{r}{2}\right)\right)} \\ & \subset \overline{U\left(B\left(0,\frac{r}{2}\right)\right) - U\left(B\left(0,\frac{r}{2}\right)\right)} = \overline{U\left(B\left(0,r\right)\right)}. \end{aligned}$$

Recapitulând, $D-D \subset \overline{U\left(B\left(0,r\right)\right)}$, iar $D-D$ este deschisă şi conține pe zero.

Rezultă că $\overline{U\left(B\left(0,r\right)\right)}$ este o vecinătate a originii. □

Teorema 4 (Teorema aplicației deschise). *Fie X şi Y spații Banach şi $U : X \to Y$ un operator liniar, continuu şi surjectiv. Atunci U este o aplicație deschisă.*

Demonstrație. Vom arăta, pentru început, că dacă $B\left(0,r\right)$ este o vecinătate a originii în X, atunci $U\left(B\left(0,r\right)\right)$ este o vecinătate a originii în Y.

Conform lemei precedente, pentru orice n, există $\varepsilon_n > 0$ astfel încât:

$$B\left(0,\varepsilon_n\right) \subset \overline{U\left(B\left(0,\frac{r}{2^n}\right)\right)}. \tag{4.4.1}$$

Vom arăta că:

$$B\left(0,\varepsilon_1\right) \subset U\left(B\left(0,r\right)\right). \tag{4.4.2}$$

Să observăm pentru început că $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Fie pentru aceasta $0 < t < \varepsilon_n$. Există $y \in B(0,\varepsilon_n)$, $t = \|y\|$.

Din (4.4.1) există un şir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in B\left(0, r/2^n\right)$ astfel încât $y = \lim\limits_{k\to\infty} U(x_k)$. Avem $\|U(x_k)\| \le \|U\|\|x_k\| \le \|U\| \cdot r/2^n$ şi deci $\|y\| \le \|U\| \cdot r/2^n$, adică $0 < t < \varepsilon_n$ implică $t \le \|U\| \cdot r/2^n$. Atunci $\varepsilon_n \le \|U\| \cdot r/2^n$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$.

Revenind la demonstraţia afirmaţiei (4.4.2), fie $y \in B(0,\varepsilon_1)$. Din (4.4.1) rezultă că există $x_1 \in B(0, r/2)$ astfel încât $\|y - U(x_1)\| < \varepsilon_2$. Avem deci $y - U(x_1) \in B(0,\varepsilon_2)$ şi folosind din nou relaţia (4.4.1) rezultă că există $x_2 \in B\left(0, r/2^2\right)$ astfel încât $\|y - U(x_1) - U(x_2)\| < \varepsilon_3$.

Se construieşte astfel prin inducţie un şir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ astfel încât:

$$\|x_n\| < \frac{r}{2^n}\ (n = 1,2,3,\cdots), \left\| y - U\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| < \varepsilon_{n+1} \quad (4.4.3)$$

Din $\|x_n\| < r/2^n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ rezultă că seria $\sum_{n\ge 1} x_n$ este absolut convergentă şi deci convergentă.

Fie $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Atunci $\|x\| < \sum_{n=1}^{\infty} r/2^n = r$, deci $x \in B(0,r)$, iar din (4.4.3) rezultă că $y = U(x)$. Are loc deci incluziunea (4.4.2).

Din această primă etapă rezultă apoi evident că dacă V este o vecinătate a originii în X, atunci $U(V)$ este o vecinătate a originii în Y.

Fie, în fine, G o mulțime deschisă în X. Faptul că $U(G)$ este o mulțime deschisă este echivalent cu aceea că $U(G)$ este vecinătate pentru fiecare punct al ei.

Fie deci $y \in U(G)$, $y = U(x)$, $x \in G$. Conform ipotezei şi etapei precedente $U(G-x)$ este o vecinătate a originii în Y, deci $U(G)$ este vecinătate pentru y. Mulțimea $U(G)$ este deschisă şi prin urmare U este aplicație deschisă. □

Corolarul 1. *Fie X şi Y spații Banach şi $U \in \mathcal{L}(X)$ un operator bijectiv. Atunci U^{-1} este continuu.*

Demonstrație. În enunț, U^{-1} este inversul lui U în clasa funcțiilor şi este un operator liniar. Continuitatea sa va rezulta din teorema precedentă. Într-adevăr, dacă G este o mulțime deschisă în X, atunci preimaginea ei prin U^{-1}, $\left(U^{-1}\right)^{-1}(G)$ este mulțimea $U(G)$ şi este deschisă în Y conform teoremei precedente. Aceasta arată că U^{-1} este continuu. □

Corolarul 2. *Fie X un spațiu liniar, p şi q norme comparabile pe X, astfel încât, înzestrat cu fiecare din ele X este spațiu Banach. Atunci cele două norme sunt echivalente.*

Demonstrație. Normele p şi q fiind comparabile, există $\mu > 0$ astfel încât, spre exemplu, $p(x) \le \mu q(x)$ $(x \in X)$. Aceasta este echivalent cu faptul că aplicația identică, $I:(X,q) \to (X,p)$, este continuă.

Conform corolarului precedent, I^{-1} este continuă, deci există $\lambda > 0$ astfel încât $q(x) \leq \lambda p(x)$ $(x \in X)$.

Normele p şi q sunt echivalente. □

4.5. Operatori închişi

Noţiunea de operator închis este o rafinare a noţiunii de operator continuu.

Fie X şi Y spaţii liniare normate şi $U : X \to Y$. Se notează $G(U) = \{(x, U(x)) : x \in X\}$ şi se numeşte *graficul funcţiei* U. Dacă U este operator liniar, atunci $G(U)$ este un subspaţiu liniar în $X \times Y$.

Amintim că $X \times Y$ se organizează canonic cu structura de spaţiu normat dată, spre exemplu, de norma:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad ((x, y) \in X \times Y),$$

unde am folosit aceeaşi notaţie pentru normele din X, Y, respectiv $X \times Y$.

Se ştie că dacă X şi Y sunt spaţii Banach, atunci $X \times Y$ este spaţiu Banach.

Definiţie. Operatorul liniar $U : X \to Y$ se numeşte *închis* dacă graficul său este o mulţime închisă.

Observaţie. Operatorul U este închis dacă şi numai dacă are următoarea proprietate de *continuitate*: *Dacă* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = y$, *atunci* $y = U(x)$, *adică* $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$.

Teorema 5 (Teorema graficului închis). *Fie X şi Y spații Banach şi $U : X \to Y$ un operator liniar şi închis.*
Atunci U este continuu.

Demonstrație. Definim $p : X \to \mathbb{R}$, $p(x) = \|x\| + \|U(x)\|$. Funcționala p este normă, comparabilă cu norma din X, căci $p(x) \geq \|x\|$ $(x \in X)$, iar (X, p) este spațiu Banach. Fie, pentru aceasta, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un şir Cauchy în raport cu norma p. Atunci $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{U(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sunt şiruri Cauchy, deci convergente.

Fie $x \in X$ şi $y \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = y$. Operatorul U fiind închis, avem $y = U(x)$.

Recapitulând, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ în raport cu norma p. Atunci (X, p) şi $(X, \| \ \|)$ sunt spații Banach, normele p şi $\| \ \|$ sunt comparabile, deci echivalente (vezi teorema aplicației deschise, corolar).

Există deci $M > 0$ astfel încât $p(x) \leq M\|x\|$ pentru orice $x \in X$, de unde rezultă că operatorul U este continuu. □

4.6. Operatori compacți

Fie X şi Y spații liniare normate peste acelaşi corp $\mathbb{K}$.

Definiție. Un operator liniar $U : X \to Y$ se numeşte *compact*, dacă pentru orice mulțime mărginită $A \subset X$, mulțimea $\overline{U(A)}$ este compactă.

Observații.

1) *Orice operator compact este continuu.*

Justificare. Într-adevăr, mulțimea $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ fiind mărginită, dacă U este compact, atunci mulțimea $\{U(x) : \|x\| \leq 1\}$ este relativ compactă, deci mărginită, de unde rezultă că U este continuu.

2) Fie X un spațiu liniar normat de dimensiune infinită și $I : X \to X$ operatorul identitate. Din teorema lui Riesz de caracterizare a spațiilor liniare normate de dimensiune finită rezultă că I *nu este compact*. Deci, *există operatori liniari și continui care nu sunt compacți.*

3) Fie $U : X \to Y$ un operator liniar și continuu astfel încât $\dim U(X) < \infty$. Atunci U este compact (se numește *operator de rang finit*).

Propoziție. *Fie $U : X \to Y$ un operator liniar. Operatorul U este continuu dacă și numai dacă pentru orice șir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$, există un subșir $\left(x_{n_k}\right)_k$ astfel încât $\left(U\left(x_{n_k}\right)\right)_k$ este convergent.*

Demonstrație. Dacă U este compact, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir mărginit, atunci mulțimea $\{U(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ este relativ compactă, deci există un subșir convergent $\left(U\left(x_{n_k}\right)\right)_k$.

Reciproc, fie $A \subset X$ o mulțime mărginită și fie $(U(x_n))_n$, $x_n \in A$, un șir în $U(A)$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit și există, conform ipotezei, un subșir $\left(x_{n_k}\right)_k$ astfel încât $\left(U\left(x_{n_k}\right)\right)_k$ este convergent.

Din teorema de caracterizare a relativ compacității în spații metrice rezultă că mulțimea $U(A)$ este relativ compactă. Operatorul U este deci compact. □

Teorema 6. *Fie $\mathcal{K}(X,Y)$ mulțimea operatorilor liniari compacți $U : X \to Y$. Atunci $\mathcal{K}(X,Y)$ este un subspațiu liniar în $\mathcal{L}(X,Y)$ şi este un subspațiu liniar închis dacă Y este spațiu Banach.*

Demonstrație. Fie $U, V \in \mathcal{K}(X,Y)$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit. Conform propoziției precedente, există $\left(x_{n_k}\right)_k$ un subşir astfel încât $\left(U\left(x_{n_k}\right)\right)_k$ este convergent.

Din compacitatea operatorului V, rezultă că există apoi un subşir $\left(x_{n_{k_l}}\right)_l$ în $\left(x_{n_k}\right)_k$ astfel încât $\left(V\left(x_{n_{k_l}}\right)\right)_l$ este convergent.

Atunci $\left((U+V)\left(x_{n_{k_l}}\right)\right)_l$ este convergent şi deci $U+V$ este compact (am folosit din nou propoziţia precedentă).

Este evident că $\alpha U \in \mathcal{K}(X,Y)$ pentru orice număr α.

Aceasta arată că *mulțimea operatorilor compacți este un subspațiu liniar în $\mathcal{L}(X,Y)$*.

Să presupunem că Y este spațiu Banach.

Pentru a arăta că subspațiul $\mathcal{K}(X,Y)$ este închis, fie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir în $\mathcal{K}(X,Y)$ convergent în $\mathcal{L}(X,Y)$ către U. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit în X.

Cu ajutorul ”procedeului diagonal” se extrage un subşir $(x_{nn})_n$ astfel încât, pentru orice k şirul $(U_k(x_{nn}))_n$ este convergent.

Avem inegalităţile următoare:

$$\begin{aligned}\|U(x_{nn})-U(x_{mm})\| &\le \|U(x_{nn})-U_k(x_{nn})\|+\\ &+\|U_k(x_{nn})-U_k(x_{mm})\|+\\ &+\|U_k(x_{mm})-U(x_{mm})\|\le\\ &\le \|U-U_k\|(\|x_{nn}\|+\|x_{mm}\|)+\\ &+\|U_k(x_{nn})-U_k(x_{mm})\|.\end{aligned}$$

Rezultă că $(U(x_{nn}))_n$ este şir Cauchy în Y, deci este convergent şi, prin urmare, U este compact. Aceasta arată că mulţimea $\mathcal{K}(X,Y)$ este închisă în $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Observaţii.

1) Din teorema precedentă subliniem că dacă $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de operatori compacţi, convergent în norma din $\mathcal{L}(X,Y)$ către operatorul U, atunci U este compact.

2) Dacă U,V sunt operatori liniari şi continui, care se pot compune şi cel puţin unul compact, atunci compunerea lor este un operator compact.

Propoziţia 2. *Dacă X este spaţiu Banach, iar $U\in\mathcal{K}(X,Y)$ şi $U(X)$ este un subspaţiu liniar închis, atunci U este operator de rang finit* ($\dim U(X)<\infty$).

Demonstraţie. Avem $U(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{nU(B(0,1))}$.

Conform teoremei lui Baire, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\operatorname{Int} n_0 \overline{U\left(B(0,1)\right)} \neq \varnothing$, de unde rezultă că $\operatorname{Int} \overline{U\left(B(0,1)\right)} \neq \varnothing$.

Deoarece U este compact, mulțimea $\overline{U\left(B(0,1)\right)}$ este compactă şi atunci $\operatorname{Int} \overline{U\left(B(0,1)\right)}$ este o mulțime relativ compactă, cu interiorul nevid în $U(X)$.

Din teorema lui Riesz, rezultă că $\dim U(X) < \infty$. □

Lema 1 (Riesz). *Fie X un spațiu liniar normat, $Y \subsetneqq X$, un subspațiu liniar închis şi $\varepsilon \in (0,1)$. Există atunci $a_\varepsilon \in Y$, astfel încât $\|a_\varepsilon\| = 1$ şi $\varepsilon \le \operatorname{dist}(a_\varepsilon, Y) \le 1$.*

Demonstrație. Subspațiul liniar $Y \subset X$, $Y \neq X$ fiind închis, există $x \in X \setminus Y$ şi deci $\operatorname{dist}(x,Y) := d > 0$. Rezultă că există $w \in Y$ astfel încât $\|x - w\| < \frac{1}{\varepsilon} d$.

Fie $a_\varepsilon = \frac{1}{\|x-w\|}(x-w)$. Atunci avem:

$$\|a_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|x-w\|}\big\|x - w - \|x-w\| y\big\| \ge \frac{1}{\|x-w\|} d > \varepsilon, \ \forall\, y \in Y. \ \square$$

Observație. Se reține afirmația din lema precedentă, numită **lema cvasiperpendicularei**, prin:

$$\sup_{\|a\|=1} \operatorname{dist}(a, Y) = 1.$$

Lema 2. *Fie X un spațiu liniar normat, Y şi Z subspații liniare închise, $Y \subsetneqq Z$, fie $U : X \to X$ un operator liniar astfel*

încât $(I-U)(Z) \subset Y$. *Atunci există* $a \in Z \setminus Y$, $\|a\|=1$ *astfel încât* $\|U(a)-U(y)\| \geq \frac{1}{2}$ $(y \in Y)$.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă $U(Y) \subset Y$. Conform lemei 1, există $a \in Z$, $\|a\|=1$ și $\|a-y\| \geq \frac{1}{2}$ $(y \in Y)$. Pentru $y \in Y$, avem atunci:

$$\|U(a)-U(y)\| = \|a-(a-U(a)+U(y))\| \geq \frac{1}{2},$$

căci $a-U(a)$ și $U(y)$ aparțin lui Y. □

Observație. Lema spune că $\overline{U(Y)} \subsetneqq U(Z)$.

Teorema 7 (Riesz-Schauder). *Fie* X *un spațiu liniar normat și* $U : X \to Y$ *un operator compact. Atunci:*

i) $\dim \ker(I-U) < \infty$;

ii) Dacă $I-U$ *este injectiv, atunci, pentru orice subspațiu liniar închis* Z, $(I-U)(Z)$ *este un subspațiu liniar închis;*

iii) Dacă $I-U$ *este injectiv, atunci* $I-U$ *este surjectiv și* $(I-U)^{-1}$ *este continuu.*

Demonstrație. (i). Fie $Y = \ker(I-U)$. Atunci $x \in Y \Leftrightarrow U(x) = x$. Fie $A = \{x \in Y : \|x\| \leq 1\}$. Atunci $U(A) = A$.

Deoarece A este mărginită, iar U este compact, rezultă că $\overline{U(A)}$ este compactă, adică $\overline{A}$ este compactă.

Deoarece Y este închis, rezultă că A este închisă şi, în concluzie, A este o vecinătate compactă a originii în Y.

Din teorema lui Riesz, rezultă că $\dim U(Y) < \infty$.

(ii). Presupunem că $I-U$ este injectiv şi fie Z un subspațiu liniar închis în X.

Vom arăta că $(I-U)(Z)$ este, de asemenea, un subspațiu liniar închis. Fie, pentru aceasta, $(x_n)_n$ un şir în Z, astfel încât $((I-U)(x_n))_n$ este convergent. Fie:

$$y = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - U(x_n)\right) \tag{4.5.1}$$

Dacă am presupune că $(x_n)_n$ este nemărginit, extrăgând eventual un subşir, putem presupune că $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \infty$.

Atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|x_n\|}\left(x_n - U(x_n)\right) = 0$ sau:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\|x_n\|}x_n - U\left(\frac{1}{\|x_n\|}x_n\right)\right) = 0 \tag{4.5.2}$$

Deoarece U este compact şi $\left\|\frac{1}{\|x_n\|}x_n\right\| = 1$, rezultă că există un subşir $\left(x_{n_k}\right)_k$ asfel încât $U\left(\frac{1}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\right)_k$ este convergent.

Din (4.5.2) rezultă că şirul $\left(\frac{1}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\right)_k$ este convergent.

Fie $x = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}$. Atunci $\|x\| = 1$, deci $x \neq 0$.

Din (4.5.2) ar rezultă $x-U(x)=0$, ceea ce contrazice ipoteza. Rămâne deci că şirul $(x_n)_n$ este mărginit.

Deoarece U este compact, există un subşir $\left(x_{m_k}\right)_k$ astfel încât $\left(U\left(x_{m_k}\right)\right)_k$ este convergent.

Din (4.5.1) rezultă că $\left(x_{m_k}\right)_k$ este convergent.

Fie $w=\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k}$.

Deoarece subspaţiul liniar Z este închis, rezultă că $w\in Z$, iar din (4.5.1) rezultă că $y=w-U(w)$, adică $y\in(I-U)(Z)$. Subspaţiul liniar $(I-U)(Z)$ este deci închis.

(iii). Presupunem în continuare că $I-U$ este injectiv şi vom arăta că este şi surjectiv. Notăm $X_0=X$, $X_1=(I-U)X_0$, $X_{n+1}=(I-U)X_n$ pentru $n=1,2,3,\cdots$. Atunci avem $X_{n+1}\subset X_n$.

Conform punctului (ii), fiecare X_n este subspaţiu liniar închis.

Dacă am presupune că, pentru orice n, incluziunea $X_{n+1}\subset X_n$ este strictă, cum $(I-U)(X_n)=X_{n+1}$, din lema 2 ar rezulta că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, există $a_n\in X_n$, $\|a_n\|=1$ şi $\|U(a_n)-U(x)\|\geq\frac{1}{2},\ \forall x\in X_{n+1}$. Pentru $n\neq m$, am avea atunci $\|U(a_n)-U(a_m)\|\geq\frac{1}{2}$, ceea ce contrazice compacitatea lui U.

Contradicţia la care s-a ajuns dovedeşte că există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $X_{n_0+1}=X_{n_0}$, adică $(I-U)\left(X_{n_0}\right)=(I-U)\left(X_{n_0+1}\right)$.

Din injectivitatea lui $I-U$, rezultă că $X_{n_0} = X_{n_0 - 1}$ şi, prin recurență, rezultă că $X_1 = X_0$, adică $(I-U)(X) = X$.

Mai avem de arătat că $(I-U)^{-1}$ este continuu.

Fie pentru aceasta $(y_n)_n$ un şir convergent către 0 şi fie $x_n = (I-U)^{-1}(y_n)$, adică:

$$y_n = x_n - U(x_n) \tag{4.5.3}$$

Ca în prima parte a demonstrației rezultă că şirul $(x_n)_n$ este şir mărginit. Pentru fiecare subşir $\left(x_{n_k}\right)_k$ există un subşir $\left(x_{n_{k_l}}\right)_l$ astfel încât şirul $\left(U\left(x_{n_{k_l}}\right)\right)_l$ este convergent. Din (4.5.3) rezultă că $\left(x_{n_{k_l}}\right)_l$ este convergent.

Fie $v = \lim\limits_{l\to\infty} x_{n_{k_l}}$. Din (4.5.3) rezultă $v - U(v) = 0$ şi, din ipoteză, rezultă $v = 0$. Atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent şi are limita 0. Operatorul $(I-U)^{-1}$ este deci continuu. □

Observație. Dacă X este spațiu Banach, atunci continuitatea operatorului $(I-U)^{-1}$ rezultă din teorema aplicației deschise.

Exemple.

1) Fie $p > 1$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit şi $U : \ell^p \to \ell^p$ operatorul definit prin $U(x) = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$.

Se ştie că U este liniar şi continuu şi că $\|U\| = \sup\limits_{n\geq 1} |\lambda_n|$.

Operatorul U este compact dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Într-adevăr, să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ şi fie $U_n : \ell^p \to \ell^p$, $U_n(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n, 0, 0, \cdots)$. Operatorul U_n este continuu, de rang finit şi este deci compact. Avem $U(x) - U_n(x) = (0, \cdots, 0, \lambda_{n+1} x_{n+1}, \cdots)$. Atunci $\|U - U_n\| = \sup\limits_{k\geq n} |\lambda_k|$, iar din ipoteză rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \|U - U_n\| = 0$. Din teorema 6 rezultă că operatorul U este compact.

Reciproc, să presupunem că operatorul U este compact. Dacă $e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$, unde 1 se află pe locul n, atunci şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este mărginit ($\|e_n\| = 1$). Operatorul U fiind compact, mulțimea $\overline{\{U(e_n) : n \geq 1\}}$ este compactă, adică $\overline{\{\lambda_n e_n : n \geq 1\}}$ este compactă. Pentru orice şir $(n_k)_k$ strict crescător de numere naturale, există un subşir $\left(n_{k_l}\right)_l$ astfel încât şirul $\left(\lambda_{k_l} n_{k_l}\right)_l$ este convergent şi deci este şir Cauchy.

Rezultă că $\lim\limits_{l\to\infty} \lambda_{n_{k_l}} = 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

2) Fie $a : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi $U : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatorul definit prin:

$$U(x)(s) = \int_0^1 a(s,t)\, x(t)\, dt\,.$$

Pe spațiul $C([0,1])$ se consideră norma $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

Operatorul U este liniar şi continuu. Fie $A \subset C([0,1])$ o mulțime mărginită. Atunci mulțimea $U(A)$ este mărginită şi egal uniform continuă. Din teorema Arzela-Ascoli rezultă că mulțimea $U(A)$ este relativ compactă şi deci operatorul U este compact.

3) Fie $U : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatorul definit prin $U(x) = t\,x(t)$ $(t \in [0,1])$.

Operatorul U este liniar, continuu, dar nu este compact (se poate considera şirul $(x_n)_n$, $x_n(t) = \sin nt$, $t \in [0,1]$).

4.7. Dualul unui spațiu liniar normat

Fie X un spațiu liniar normat peste corpul $\mathbb{K}$.

Se notează X' mulțimea tuturor funcționalelor liniare şi continue $f : X \to \mathbb{K}$ şi se numeşte *dualul* lui X.

(X' se numeşte uneori *conjugatul* lui X şi se notează X^*).

Dualul X' este deci $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$, a cărui organizare ca spațiu liniar normat se face cu norma $\|f\| = \sup\{ |f(x)| : \|x\| \le 1\}$.

Se ştie că atunci $(X', \|\ \|)$ este spațiu Banach.

Propoziția 1. *O funcțională liniară pe un spațiu liniar normat este continuă dacă şi numai dacă nucleul ei este un subspațiu închis.*

Demonstrație. Dacă f este o funcțională liniară şi continuă, atunci nucleul ei $f^{-1}(\{0\})$ este imaginea inversă printr-o funcție continuă a mulțimii închise $\{0\}$ şi este deci o mulțime închisă.

Reciproc, fie f o funcțională liniară al cărei nucleu este un subspațiu închis. Presupunem că $f : X \to \mathbb{K}$ nu este funcționala nulă şi fie $x_0 \in X$, $x_0 \notin \ker f$, $f(x_0) = 1$. Nucleul $\ker f$ fiind o mulțime închisă, există atunci $d > 0$ astfel încât:

$$\|x_0 - y\| \geq d \quad (y \in \ker f) \tag{4.7.1}$$

Relația $x = x - f(x)x_0 + f(x)x_0$ exprimă faptul că nucleul lui f este un subspațiu maximal. Dacă $f(x) \neq 0$, avem atunci $\frac{1}{f(x)} \cdot x = x_0 - \frac{1}{f(x)} \cdot \left(f(x)x_0 - x\right)$ şi din (4.7.1) rezultă $\frac{1}{|f(x)|} \cdot \|x\| \geq d$ şi deci $|f(x)| \leq \frac{1}{d} \cdot \|x\| \ (x \in X)$.

Rezultă că funcționala f este continuă. □

Corolar. *O funcțională liniară este discontinuă dacă şi numai dacă nucleul ei este un subspațiu dens.*

Teorema 8 (Hahn-Banach). *Fie X un spațiu liniar normat, fie $Y \subset X$, Y un subspațiu liniar şi $f : Y \to \mathbb{R}$ o funcțională liniară şi continuă.*

Există atunci $F : X \to \mathbb{R}$ o funcțională liniară şi continuă a cărei restricție la Y este f şi $\|F\| = \|f\|$.

Demonstrație. Din ipoteză avem $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \ (x \in Y)$.

Notăm $p(x)=\|f\|\cdot\|x\|$ şi reținem $|f(x)|\le p(x)$ $(x\in Y)$.

Considerăm mulțimea tuturor perechilor (t,Z), unde Z este subspațiu liniar, $Z\supset Y$ şi $t:Z\to\mathbb{R}$ este aplicație liniară cu proprietățile $|t(x)|\le p(x)$ $(x\in Z)$, $t|_Z=f$. Notăm $H=\{(t,Z)\}$. Mulțimea H este deci formată din prelungirile liniare, majorate de p, ale funcționalei f. Ordonăm mulțimea H astfel: $(t_1,Z_1)\le(t_2,Z_2)\Leftrightarrow Z_1\subset Z_2,\ t_2|_{Z_2}=t_1$. Mulțimea H este atunci inductiv ordonată, adică orice parte total ordonată a sa este majorată. Conform lemei lui Zorn, în H există cel puțin un element maximal, fie el (F,W). Atunci $F:W\to\mathbb{R}$ este o funcțională liniară a cărei restricție la Y $(Y\subset W)$ este f şi $|F(x)|\le p(x)$ $(x\in W)$.

Vom arăta că $W=X$ şi, pentru aceasta, să presupunem prin absurd că $W\ne X$. Fie $x_0\in X\setminus W$ şi $G:Sp(W,x_0)\to\mathbb{R}$ definită prin $G(x+\lambda x_0)=F(x)+\lambda g(x_0)$ $(x\in W,\lambda\in\mathbb{R})$, cu $g:X\to\mathbb{R}$ definită de $g(x)=\inf\{p(x+y)-F(y): y\in W\}$.

Funcționala G este atunci corect definită, liniară, prelungeşte pe F (şi deci şi pe f),

$$|G(x+\lambda x_0)|\le p(x+\lambda x_0)\ \ (x+\lambda x_0\in Sp(W,x_0)).$$

Atunci $(G,Sp(W,x_0))\in H$ este strict mai mare decât (F,W), ceea ce contrazice maximalitatea lui (F,W).

Rămâne că $W=X$.

Recapitulând, funcționala $F:X\to\mathbb{R}$ prelungeşte pe f şi

$$F(x)\le\|f\|\|x\|\ \ (x\in X).$$

Atunci $\|F\|=\|f\|$ şi teorema este demonstrată. □

Observații.

1) Cu notațiile şi ipotezele din teorema precedentă, fie $h : X \to \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = \inf\{p(x+y) - f(y) : y \in Y\}$.

Prelungirea F din teorema precedentă este unică dacă şi numai dacă funcționala h este liniară (exercițiu).

2) Funcționala F din teorema precedentă are proprietatea $|F(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \; (x \in X)$.

3) Se spune că în teorema precedentă funcționala f a fost prelungită la X cu păstrarea liniarității, continuității şi a normei.

Teorema 9 (Teorema Bohnenblust-Sobczyk). *Fie X un spațiu liniar normat complex, $Y \subset X$ un subspațiu liniar, $f : Y \to \mathbb{C}$ o funcțională liniară şi continuă. Există atunci $F : Y \to \mathbb{C}$ o funcțională şi continuă care prelungeşte pe f şi $\|F\| = \|f\|$.*

Demonstrație. Funcționala f se poate reprezenta $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, unde $f_1, f_2 : Y \to \mathbb{R}$ sunt funcționale liniare reale (aditive şi omogene pentru scalari reali). Din $f(ix) = if(x)$ rezultă că $f_2(x) = -f_1(ix)$ şi deci:

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix) \tag{4.7.2}$$

Atunci $|f_1(x)| \le |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \; (x \in X)$ şi se poate aplica teorema 1. Există deci $F_1 : Y \to \mathbb{R}$ o funcțională liniară reală care prelungeşte pe f_1 şi astfel încât:

$|F_1(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \; (x \in X)$.

Considerăm $F : X \to \mathbb{C}$ funcționala definită prin $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$. Din (4.7.2) rezultă că F este o

prelungire a lui f, iar liniaritatea lui F rezultă din proprietatea de liniaritate reală a lui F_1 şi din $F(ix) = iF(x)$.

Scriem apoi $|F(x)| = e^{i\theta} F(x) = F(e^{i\theta} x) = F_1(e^{i\theta} x)$, de unde rezultă că $|F(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$.

Atunci F este continuă şi $\|F\| = \|f\|$. □

Propoziția 2. *Fie X un spațiu liniar normat, $Y \subset X$ un subspațiu liniar închis, $Y \neq X$ şi $x_0 \notin Y$. Există atunci $f \in X'$ astfel încât $f(Y) = \{0\}$ şi $f(x_0) = 1$.*

Demonstrație. Dacă notăm $Z = Sp(Y, x_0)$, atunci avem $Z = \{y + \lambda x_0, y \in Y\}$, scrierea $y + \lambda x_0$ este unică, Y este un subspațiu închis în Z.

Funcționala $g : Z \to \mathbb{K}$, $g(y + \lambda x_0) = \lambda$ este corect definită, liniară, $g(x_0) = 1$, $\ker g = Y$. Conform propoziției 1 rezultă că funționala g este continuă.

Din teorema Hahn-Banach rezultă că g se poate prelungi pe X cu păstrarea liniarității şi a continuității.

Dacă f este o astfel de prelungire, atunci $f(Y) = \{0\}$ şi $f(x_0) = 1$. (Se poate presupune că $f(x_0) = \gamma$ $(\gamma \in \mathbb{K})$). □

Propoziția 3. *Fie $X \neq \{0\}$ un spațiu liniar normat şi $x_0 \in X$. Există atunci $f \in X'$ astfel încât $\|f\| = 1$ şi $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstrație. Presupunem că $x_0 \neq 0$ şi fie $Y = Sp\{x_0\}$, $Y = \{\lambda x_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Fie $f_0 : Y \to \mathbb{K}$ funcționala definită prin $f_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Atunci f_0 este continuă, $\|f_0\| = 1$, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

Fie $f : X \to \mathbb{K}$ o prelungire a funcționalei f_0 ca în teorema Hahn-Banach:

$$\|f\| = \|f_0\| = 1 \text{ şi } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|.$$

Dacă $x_0 = 0$, afirmația din enunț este adevărată pentru orice element de normă 1 din dual.

Se notează $X'' = (X')'$ şi se numeşte *bidualul* lui X. □

Presupunem în continuare că $X \neq \{0\}$.

Fie $x \in X$ şi funcționala $\hat{x} : X' \to \mathbb{K}$, definită prin $\hat{x}(f) = f(x)$ $(f \in X')$. Este evident că $\hat{x}$ este liniară, iar din $|\hat{x}(f)| \leq \|x\| \|f\|$ rezultă că este continuă. Atunci $\hat{x} \in X''$ şi:

$$\|\hat{x}\| \leq \|x\| \tag{4.7.3}$$

Conform propoziției precedente există apoi $g \in X'$, $\|g\| = 1$, $g(x) = \|x\|$ şi atunci $\|\hat{x}\| \geq |\hat{x}(g)| = |g(x)| = \|x\|$. Din (4.7.3) rezultă că $\|\hat{x}\| = \|x\|$. Vom nota $X_0'' = \{\hat{x} : x \in X\}$.

Aplicația $\varphi : X \to X''$, definită prin $\varphi(x) = \hat{x}$ este atunci liniară, izometrică ($\|\varphi(x)\| = \|x\|$) şi este deci un izomorfism de spații liniar normate între X şi subspațiul X_0'' al lui X''.

Definiție. Spațiul liniar normat X se numeşte *reflexiv* dacă $X_0'' = X''$.

Observații.

1) Orice spațiu reflexiv este spațiu Banach.

2) Spațiul X este reflexiv dacă prin aplicația $x \mapsto \hat{x}$, spațiul X este izomorf, ca spațiu liniar normat, cu X''.

Definiție. Mulțime $A \subset X$ se numeşte *slab mărginită* dacă pentru orice $f \in X'$ mulțimea $f(A)$ este mărginită.

Teorema 10. *O submuțime a unui spațiu liniar normat este mărginită dacă şi numai dacă este slab mărginită.*

Demonstrație. Este evident că dacă mulțimea A este mărginită în sensul normei din X, atunci ea este slab mărginită. Să presupunem că A este slab mărginită. Aceasta înseamnă că pentru orice $f \in X'$ există $M > 0$ astfel încât $\left|f(x)\right| \leq M \ (x \in A)$, adică $\left|\hat{x}(f)\right| \leq M \ (x \in A)$. Familia de funcționale $\{\hat{x} : x \in A\}$ este deci punctual mărginită, iar din principiul mărginirii uniforme rezultă că mulțimea $\{\|\hat{x}\| : x \in A\}$ este mărginită. Atunci $\{\|x\| : x \in A\}$ este mărginită. (Am folosit faptul că X' este spațiu Banach). □

Definiție. Şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in X'$ se numeşte *slab convergent* dacă există $f \in X'$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$.

Observații.

1) Dacă şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge în sensul normei din X' către $f \in X'$, atunci el converge slab către f.

2) Dacă X este spațiu Banach, atunci şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ este slab convergent dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$, şirul $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ este convergent.

Teorema 11. *Fie X un spațiu Banach şi $f_n, f \in X'$, $(n = 1,2,3,\cdots)$. Şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge slab către f dacă şi numai dacă:*

i) există $M > 0$ astfel încât $\|f_n\| \le M$ $(n = 1,2,3,\cdots)$;

ii) există o submulțime $A \subset X$ astfel încât $\overline{Sp(A)} = X$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in A)$.

Demonstrație. Dacă şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge slab către f, atunci (i) rezultă din principiul mărginirii uniforme, iar (ii) este evidentă.

Pentru afirmația reciprocă, din (ii) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$ pentru orice $y \in \mathrm{Sp}(A)$ şi apoi, folosind şi (i) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in A)$. □

Teorema 12. *Dacă X este un spațiu liniar normat al cărui dual este separabil, atunci X este separabil.*

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că există o mulțime $A = \{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$, unde $f_n \in X'$, $\|f_n\| = 1$ şi astfel încât

$\overline{A} = \{ f \in X' : \| f \| = 1 \}$. Pentru fiecare n, deoarece $\| f_n \| = 1$, există $x_n \in X$ cu proprietățile: $\| x_n \| \leq 1$ şi $| f_n (x_n) | \geq \frac{1}{2}$.

Fie $Y = \overline{Sp \{ x_n : n = 1, 2, 3, \cdots \}}$. În ipoteza că $Y \neq X$, din propoziția 2 rezultă că există $f \in X'$, $\| f \| = 1$ şi $f (Y) = \{ 0 \}$.

Atunci $\| f - f_n \| \geq | f (x_n) - f_n (x_n) | = | f_n (x_n) | \geq \frac{1}{2}$.

Aceasta arată că f nu poate fi aproximată oricât de bine în sensul normei cu elemente din A, ceea ce este o contradicție.

Rămâne că $Y = X$, iar mulțimea:

$$B = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$$

este atunci numărabilă şi densă în X. □

4.8. Dualele unor spații liniare normate concrete

1). Fie spațiul liniar normat $\left(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2 \right)$. Pentru fiecare $f \in \left(\mathbb{R}^n \right)'$, există şi este unic $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $f (x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Corespondența $f \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ este izomorfism de spații liniare normate între $\left(\mathbb{R}^n \right)'$ şi $\mathbb{R}^n$, adică $\left(\mathbb{R}^n \right)' = \mathbb{R}^n$ (dualul lui $\mathbb{R}^n$ este însuşi $\mathbb{R}^n$).

2). Fie spațiile $X=\left(\mathbb{K}^m,\|\ \|_\infty\right)$ şi $Y=\left(\mathbb{K}^m,\|\ \|_1\right)$, unde $\|x\|_\infty=\max\left\{\left|x_j\right|: j=1,2,\cdots,m\right\}$, $\|x\|_1=\sum_{j=1}^m\left|x_j\right|$. Pentru $f\in X'$, există $y\in\mathbb{K}^m$ astfel încât $f(x)=\sum_{j=1}^m x_j y_j$, $y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_m\right)$, $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)$ şi $\|f\|=\|y\|_1$. Corespondența $f\mapsto y$ este un izomorfism de spații liniare normate între X' şi Y. Scriem aceasta $X'=Y$. Cu o semnificație corespunzătoare $Y'=X$.

3). Să considerăm spațiul $\left(\ell^1,\|\ \|_1\right)$,

$$\ell^1=\left\{x=\left(x_n\right)_{n\geq 1}: x_n\in\mathbb{K}, \sum_{n\geq 1}\left|x_n\right|<\infty\right\},\ \|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|.$$

Se ştie că $\left(\ell^1,\|\ \|_1\right)$ este spațiu Banach cu bază Schauder:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n, \tag{4.8.1}$$

unde $x=\left(x_n\right)_{n\geq 1}\in\ell^1$, $e_n=\left(\delta_k^n\right)_{k\geq 1}$.

Dacă $f\in\left(\ell^1\right)'$, atunci:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n, \tag{4.8.2}$$

unde $y_n:=f\left(e_n\right)$.

Atunci $\left|y_n\right|\leq\|f\|$ $(n\geq 1)$, deci şirul $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Notând $y=\left(y_n\right)_{n\geq 1}$, reținem că există (şi este unic) $y\in\ell^\infty$ astfel încât are loc (4.8.2) pentru orice $x\in\ell^1$ şi:

$$\|y\|_\infty\leq\|f\|. \tag{4.8.3}$$

Din (4.8.2) rezultă că $\left|f\left(x\right)\right| \le \sup\limits_{n\ge 1}\left|y_n\right| \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|$ sau $\left|f\left(x\right)\right| \le \|y\|_{\infty} \cdot \|x\|_1$ $\left(x \in \ell^1\right)$. Atunci $\|f\| \le \|y\|_{\infty}$ şi din (4.8.3) avem $\|f\| = \|y\|_{\infty}$ (4.8.4)

Este apoi evident că pentru orice $y \in \ell^{\infty}$, $y = \left(y_n\right)_{n\ge 1}$ prin formula (4.8.2) se defineşte o funcțională liniară, continuă pe ℓ^1.

Aplicația $\varphi : \left(\ell^1\right)' \to \ell^{\infty}$, $\varphi\left(f\right) = y$ astfel încât are loc (4.8.2), este atunci liniară, surjectivă şi păstrează norma.

Reținem deci următoarea teoremă.

Teorema 13. *Pentru orice* $f \in \left(\ell^1\right)'$ *există şi este unic* $y \in \ell^{\infty}$, $y = \left(y_n\right)_{n\ge 1}$ *astfel încât, pentru orice* $x \in \ell^1$, $x = \left(x_n\right)_{n\ge 1}$ *are loc* $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Corespondența $f \mapsto y$ *este un izomorfism de spații liniare normate între* $\left(\ell^1\right)'$ *şi* ℓ^{∞} .

Spunem că dualul lui ℓ^1 *este* ℓ^{∞} *şi scriem* $\left(\ell^1\right)' = \ell^{\infty}$. ■

4). Fie $p > 1$ şi spațiul $\left(\ell^p, \|\ \|_p\right)$,

$$\ell^p = \left\{ x = \left(x_n\right)_{n\ge 1} : x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n\ge 1}\left|x_n\right|^p < \infty \right\},\ \|x\|^p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^p\right)^{1/p}.$$

Se ştie că $\left(\ell^p, \|\ \|_p\right)$ este spațiu Banach cu bază Schauder:

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, unde $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$, $e_n = (\delta_k^n)_{k\geq 1}$ ca în exercițiul precedent. La fel, dacă $f \in (\ell^p)'$, atunci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n , \tag{4.8.5}$$

unde $y_n := f(e_n)$.

Fie $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fie $z^{(k)} = (z_j)_{j\geq 1}$, unde componentele z_j (depinzând şi de k) sunt:

$z_j = 0$ dacă $j > k$ şi $z_j y_j = |y_j|^q$ pentru $1 \leq j \leq k$.

Ca element din ℓ^p, $\left\| z^{(k)} \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \right)^{1/p}$.

Atunci $f\left(z^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{k} |y_j|^q$, de unde $\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \leq \|f\| \left\| z^{(k)} \right\|_p$.

Rezultă că $\left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \right)^{1/q} \leq \|f\| \; (k \geq 1)$. Notând $y = (y_j)_{j\geq 1}$, inegalitatea precedentă arată că $y \in \ell^q$ şi:

$$\|y\|_q \leq \|f\|. \tag{4.8.6}$$

Din reprezentarea (4.8.5) şi inegalitatea lui Hölder avem:

$$|f(x)| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p},$$

sau

$$|f(x)| \leq \|y\|_q \|x\|_p \quad \left(x \in \ell^p\right).$$

Atunci $\|f\| \le \|y\|_q$ şi din (6) avem:

$$\|f\| = \|y\|_q . \tag{4.8.7}$$

Teorema 14. *Pentru orice* $f \in \left(\ell^p\right)'$ *există şi este unic* $y \in \ell^q$, $y = \left(y_n\right)_{n\ge 1}$ *astfel încât, pentru orice* $x \in \ell^p$, $x = \left(x_n\right)_{n\ge 1}$, *avem* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. *Corespondența* $f \mapsto y$ *este un izomorfism de spații liniare normate între* $\left(\ell^p\right)'$ *şi* ℓ^q. *Spunem că dualul lui* ℓ^p *este* ℓ^q *şi scriem* $\left(\ell^p\right)' = \ell^q$. ■

5). Fie $\left(c, \| \ \|_\infty\right)$ mulțimea şirurilor numerice convergente, cu norma indusă din ℓ^∞. Se ştie că c este spațiu Banach cu bază Schauder. Dacă $x = \left(x_n\right)_{n\ge 1} \in c$, atunci $x = x_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n - x_0\right) e_n$, unde $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, $e_0 = (1,1,\cdots,1,\cdots)$, $e_n = \left(\delta_k^n\right)_{k\ge 1}$.

Dacă $f \in (c)'$, atunci:

$$f(x) = x_0 f\left(e_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n - x_0\right)\eta_n , \tag{4.8.8}$$

unde $\eta_n = f\left(e_n\right)$.

Fie $k \ge 1$, $z^{(k)} = \left(z_j\right)_{j\ge 1}$, unde componentele z_j (depinzând şi de k) sunt: $z_j = 0$ dacă $j > k$ şi $z_j \eta_j = \left|\eta_j\right|$ pentru $1 \le j \le k$.

Limita şirului $\left(z_j\right)_{j\geq 1}$ este zero şi formula (4.8.8) devine $f\left(z^{(k)}\right)=\sum_{j=1}^{k}\left|\eta_j\right|$, de unde $\sum_{j=1}^{k}\left|\eta_j\right|\leq\|f\|\left\|z^{(k)}\right\|_{\infty}=\|f\|$ $\left(k\geq 1\right)$.

Rezultă că seria $\sum_{j\geq 1}\eta_j$ este absolut convergentă, iar reprezentarea (4.8.8) se poate scrie atunci:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\eta_n\ , \tag{4.8.9}$$

unde $\eta_0=f\left(e_0\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n$.

Notăm $y=\left(\eta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şi reţinem că $y\in\ell^1$. Fie $k\geq 1$ şi $w^{(k)}=\left(w_j\right)_{j\geq 1}$, unde componentele w_j sunt astfel încât $w_j\eta_0=\left|\eta_0\right|$ dacă $j>k$ şi $w_j\eta_j=\left|\eta_j\right|$ pentru $1\leq j\leq k$.

Dacă notăm $w_0\in\mathbb{K}$ astfel încât $w_0\eta_0=\left|\eta_0\right|$, atunci $f\left(w^k\right)=\sum_{j=0}^{k}\eta_j+\sum_{j=k+1}^{\infty}\eta_j w_0$.

Rezultă că $\sum_{j=0}^{k}\left|\eta_j\right|\leq\|f\|+\sum_{j=k+1}^{\infty}\left|\eta_j w_0\right|$ $\left(k\geq 1\right)$ şi $\sum_{j=0}^{k}\left|\eta_j\right|\leq\|f\|$. Scriem aceasta astfel: $\|y\|_1\leq\|f\|$.

Din formula de reprezentare (4.8.9) rezultă apoi că $\|f\|\leq\|y\|_1$ şi, în concluzie, $\|f\|=\|y\|_1$.

Teorema 15. *Pentru orice* $f\in\left(c\right)'$ *există şi este unic* $y\in\ell^1$*,* $y=\left(y_n\right)_{n\geq 0}$ *astfel încât, pentru orice* $x\in c$*,* $x=\left(x_n\right)_{n\geq 1}$

avem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ *, unde* $x_0=\lim_{n\to\infty} x_n$. *Corespondența* $f\mapsto y$ *este un izomorfism de spații liniare normate între* $(c)'$ *şi* ℓ^1. *Spunem că dualul lui* c *este* ℓ^1 *şi scriem* $(c)'=\ell^1$. ■

6). Cu semnificația din exemplul precedent să se arate că $(c_0)'=\ell^1$ (c_0 este spațiul şirurilor convergente către zero, organizat ca spațiu liniar normat ca subspațiu liniar în ℓ^∞).

7). Vom studia dualul spațiului

$$C([a,b])=\{x:[a,b]\to\mathbb{R}: x \text{ continuã}\},$$

cu norma $\|x\|_\infty=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$.

Fie $M([a,b])=\{x:[a,b]\to\mathbb{R}: x \text{ mãrginitã}\}$,

cu norma $\|x\|_\infty=\sup\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$.

Dacă $f\in C([a,b])'$, atunci, conform teoremei Hahn-Banach, există $F:M([a,b])\to\mathbb{R}$ o funcțională liniară şi continuă, care prelungeşte pe f şi astfel încât $\|F\|=\|f\|$. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin:

$$g(a)=0,\ g(t)=F\left(\chi_{[a,t]}\right),\ \forall t\in(a,b),\ g(b)=F\left(\chi_{[a,b]}\right).$$

(χ_A este funcția caracteristică a mulțimii A).

Arătăm că funcția g este cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Într-adevăr, dacă $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$, atunci:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| g(t_{i+1}) - g(t_i) \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| F\left(\chi_{A_i}\right) \right|,$$

unde $A_i = [t_i, t_{i+1})$ dacă $i+1<n$ şi $A_n = [t_{n-1}, b]$.

Dacă $\alpha_i = \operatorname{sign}\left(F\left(\chi_{A_i}\right)\right)$, atunci:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \left| g(t_{i+1}) - g(t_i) \right| &= \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\alpha_i \chi_{A_i}\right) = F\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i}\right) \\ &\le \|F\| \cdot \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i} \right\| = \|F\|.\end{aligned}$$

Rezultă că funcţia g este cu variaţie mărginită şi

$$\operatorname*{var}_a^b g \le \|F\| = \|f\|. \qquad (4.8.10)$$

Vom arăta că $f(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t)$ $\left(x \in C([a,b])\right)$.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ cu proprietăţile următoare:

dacă $\delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$, cu $\|\delta\| < \eta$, să avem:

$$\left| x(t) - x(t_i) \right| < \varepsilon, \ \forall\, i \in \{0,1,2,\cdots,n-1\},\ \forall\, t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$\left| \int_a^b x(t)\,dg(t) - \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\left(g(t_{i+1}) - g(t_i)\right) \right| < \varepsilon.$$

Notăm suma Riemann-Stieltjes din relaţia precedentă $S_\delta(f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\left(g(t_{i+1}) - g(t_i)\right)$. Cu aceste notaţii avem:

$$S_\delta(f,g) = F\left(\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,\chi_{A_i}\right).$$

Deci: $\left|\int_a^b x(t)dg(t) - F\left(\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\chi_{A_i}\right)\right| < \varepsilon$. Atunci:

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\int_a^b x(t)dg(t)\right| &= \left|F(x)-\int_a^b x(t)dg(t)\right| \\ &\le \left|F(x)-F\left(\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\chi_{A_i}\right)\right| \\ &+\left|S_\delta(f,g)-\int_a^b x(t)dg(t)\right| \\ &\le \|F\|\cdot\left\|x-\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\chi_{A_i}\right\|_\infty + \varepsilon \\ &\le \varepsilon\cdot\|f\|+\varepsilon.\end{aligned}$$

Rezultă că:

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t) \quad \left(x\in C([a,b])\right). \tag{4.8.11}$$

Din proprietățile integralei Riemann-Stieltjes avem $|f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, g\cdot\|x\|_\infty$ şi deci $\|f\| \le \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, g$.

Din (4.8.10) rezultă atunci că:

$$\|f\| = \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, g . \tag{4.8.12}$$

Observații.

1) În reprezentarea (4.8.11) funcția g nu este unică. Spre exemplu, $g+k$ $(k\in\mathbb{R})$ realizează aceeaşi formulă.

2) Se poate arăta că dacă g_1, g_2 sunt funcţii cu variaţie mărginită pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b x(t)dg_1(t) = \int_a^b x(t)dg_2(t)$, $\forall\ x \in C([a,b])$ dacă şi numai dacă:

$$\begin{aligned}(g_1 - g_2)(a) &= (g_1 - g_2)(b) \\ &= (g_1 - g_2)(t+0) \\ &= (g_1 - g_2)(t-0)\ \forall\ t \in (a,b).\end{aligned}$$

3) Dacă în observaţia precedentă avem şi $g_1(a) = g_2(a)$ şi $g_i(t+0) = g_i(t)$ $(t \in (a,b))$, atunci $g_1 = g_2$.

Să considerăm spaţiul $NBV([a,b])$ al tuturor funcţiilor $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ cu variaţie mărginită pe $[a,b]$ şi cu proprietăţile $g(a) = 0$ şi $g(t+0) = g(t)$ $(t \in (a,b))$.

Pe acest spaţiu $\|g\| = \operatorname*{var}_a^b g$ este o normă în raport cu care $NBV([a,b])$ este spaţiu Banach.

Dacă g este o funcţie cu variaţie mărginită pe $[a,b]$, considerăm:

$$y(t) = \begin{cases} 0,\ t = a; \\ g(t+0) = g(a),\ t \in (a,b); \\ g(b) - g(a),\ t = b. \end{cases}$$

Atunci avem: $y \in NBV([a,b])$,

$$\int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^b x(t)dy(t), \forall\ x \in C([a,b]),$$

$$\operatorname*{var}_a^b y \le \operatorname*{var}_a^b g.$$

Dacă g este funcția din reprezentarea (4.8.11), atunci $f(x)=\int_a^b x(t)dy(t)$, $\|f\|=\operatorname*{var}_a^b y$.

Teorema 16. *Pentru orice* $f\in\left(C([a,b])\right)'$ *există şi este unic* $y\in NBV([a,b])$ *astfel încât, pentru orice* $x\in C([a,b])$, *avem* $f(x)=\int_a^b x(t)dy(t)$.

Corespondența $f\mapsto y$ *este un izomorfism de spații liniare normate între* $\left(C([a,b])\right)'$ *şi* $NBV([a,b])$. *Spunem că dualul lui* $C([a,b])$ *este* $NBV([a,b])$ *şi scriem* $\left(C([a,b])\right)'=NBV([a,b])$. ■

8). Fie $p\geq 1$ şi spațiul $L^p(T,\sigma,m)=L^p$, unde σ este un clan borelian ($T\in\sigma$), $m:\sigma\to\mathbb{R}_+$ este o măsură (numărabil aditivă).

Cu semnificația din exemplele precedente vom arăta că dacă $p>1$, atunci $\left(L^p\right)'=L^q$, unde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Fie $f\in\left(L^p\right)'$. Dacă $B\in\sigma$, atunci $\chi_B\in L^p$.

Definim $\nu:\sigma\to\mathbb{R}_+$, $\nu(B)=f(\chi_B)$.

Funcția ν *este numărabil aditivă.*

Într-adevăr, dacă $(B_n)_{n\geq 1}$ este un şir din σ, format din mulțimi disjuncte două câte două şi $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, atunci:

$$\left\| \chi_B - \chi_{\bigcup_{n=1}^{k} B_n} \right\|_p = \left\| \chi_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} B_n} \right\|_p$$

$$= \left(m\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} B_n \right) \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} m(B_n) \right)^{1/p},$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} \chi_{\bigcup_{n=1}^{k} B_n} = \chi_B$ în sensul normei din L^p.

Deoarece f este liniară şi continuă, avem:

$$\nu(B) = f(\chi_B) = \lim_{k\to\infty} f\left(\chi_{\bigcup_{n=1}^{k} B_n} \right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f\left(\chi_{B_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

Funcţia ν este $m-$absolut continuă, adică $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta_\varepsilon > 0$, $m(A) < \eta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |\nu(A)| < \varepsilon$. Aceasta rezultă imediat din $|f(\chi_A)| \le \|f\| \|\chi_A\|_p = \|f\| (m(A))^{1/p}$.

Conform teoremei Lebesgue-Radon-Nikodym, există $y \in L^1$ astfel încât $\nu(B) = \int\limits_T y \chi_B dm \quad (B \in \sigma)$.

Deci $f(\chi_B) = \int\limits_T y \chi_B dm \quad (B \in \sigma)$.

Folosind liniaritatea funcţionalei f şi a integralei, rezultă:

$$f(x) = \int_T y\, x\, dm, \tag{4.8.13}$$

pentru orice funcţie etajată x.

Fie $x : T \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă şi mărginită. Există atunci un şir de funcţii etajate convergent uniform către x.

Într-adevăr, există $M > 0$ astfel încât $|x(t)| \le M$, $\forall t \in T$.

Scriem $[-M, M] = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j^n$, unde I_j^n sunt intervale disjuncte două câte două, de lungime $2M/n$. Fie a_j^n mijlocul intervalului

I_j^n şi $x_n(t)=\sum_{j=1}^{n} a_j^n \chi_{x^{-1}\left(I_j^n\right)}$. Funcția x_n este etajată, $\left|x_n(t)-x(t)\right| \le 2M/n \ (t\in T)$ şi $\left|x_n(t)\right| \le M \ (t\in T)$. Şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ converge uniform şi deci în L^p către x şi $\left|x_n y\right| \le M\left|y\right|$.

Din teorema lui Lebesgue de convergență dominată: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_T x_n y\, dm=\int_T x\, y\, dm$.

Reținem deci că pentru orice funcție măsurabilă şi mărginită x avem:

$$f(x)=\int_T x\, y\, dm \tag{4.8.14}$$

Fie acum $x\in L^p$ şi fie:

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t), & \left|x(t)\right|\le n,\\ 0, & \left|x(t)\right|>n.\end{cases}$$

Funcțiile x_n sunt măsurabile şi mărginite şi

$$\left\|x-x_n\right\|_p=\left(\int_T \left|x-x_n\right|^p dm\right)^{1/p}=\left(\int_{A_n}\left|x(t)\right|^p dm\right)^{1/p},$$

unde $A_n=\left\{t\in T:\left|x(t)\right|>n\right\}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$, din absolut continuitatea integralei unei funcții din L^1 ca funcție de mulțime rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ în sensul normei din L^p.

De asemenea, şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ converge aproape peste tot către x, şirul $\left(\left|x_n\right|\right)_{n\ge 1}$ este crescător şi $\left|x_n(t)\right|\le\left|x(t)\right| \ (t\in T)$.

Avem: $\int_T \left|x_n(t)\right|\left|y(t)\right| dm \le \|f\|\|x_n\| \le \|f\|\|x\|$.

Din teorema Lebesgue-Beppo Levi rezultă atunci $\int_T |x(t)||y(t)|\,dm \le \|f\|\|x\|$ şi deci $xy \in L^1$.

Recapitulând, şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ converge a. p. t. şi în L^p către x, $|x_n y| \le |xy|$ şi, folosind din nou teorema lui Lebesgue, avem $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_T x_n y\,dm = \int_T x\,y\,dm$, adică:

$$f(x) = \int_T x\,y\,dm \quad (x \in L^1). \tag{4.8.15}$$

(Observăm că demonstraţia este valabilă pentru $p \ge 1$).

Vom arăta că $y \in L^q$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fie:

$$y_n(t) = \begin{cases} y(s), & |y(s)| \le n, \\ 0, & |y(s)| > n. \end{cases} \tag{4.8.16}$$

Avem:

$\int_T |x(t)||y_n(t)|\,dm \le \int_T |x(t)\,y(t)|\,dm = f(|x|\operatorname{sign} y) \le \|f\|\|x\|_p$, deci:

$$\int_T |x(t)||y_n(t)|\,dm \le \|f\|\|x\|_p \tag{4.8.17}$$

În inegalitatea lui Hölder avem egalitate, dacă:

$$\frac{z}{\|z\|_p}\left(\frac{w}{\|w\|_p}\right)^{\frac{1}{1-p}} = 1 \tag{4.8.18}$$

Dacă în (4.8.17) $x = |y_n|^{q/p}$, atunci este verificată relaţia (4.8.18) şi deci $\|x\|_p \|y_n\|_q = \int_T |x(t)||y_n(t)|\,dm = \|x\|_p \|y_n\|_q$.

Prin urmare: $\|y_n\|_q \le \|f\|$ sau $\left(\int_T |y_n|^q\,dm\right)^{1/q} \le \|f\|$.

Folosind din nou teorema Lebesgue-Beppo Levi obținem $\left(\int_T |y|^q \, dm\right)^{1/q} \le \|f\|$. Rezultă că $y \in L^q$ şi $\|y\|_q \le \|f\|$.

Folosind în (4.8.15) inegalitatea lui Hölder obținem $\|f\| \le \|y\|_q$. Deci $\|f\| = \|y\|_q$.

Teorema 17. *Pentru orice* $f \in \left(L^p\right)'$ *există şi este unic* $y \in L^p$, $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right)$, *astfel încât* $f\left(x\right) = \int_T x\, y\, dm \; \left(x \in L^p\right)$.

Corespondența $f \mapsto y$ *este un izomorfism de spații liniare normate între* $\left(L^p\right)'$ *şi* L^q. *Spunem că dualul lui* L^p *este* L^q *şi scriem* $\left(L^p\right)' = L^q$. ■

9). Vom arăta că $\left(L^1\right)' = L^\infty$. Fie $f \in \left(L^1\right)'$. Am observat că are loc $f\left(x\right) = \int_T x\, y\, dm \; \left(x \in L^1\right)$, unde $y \in L^1$.

Şirul $\left(y_n\right)_n$ din (4.8.16) este format din funcții din $L^\infty = L^\infty\left(T, \sigma, m\right)$. Observăm că pentru orice $n \ge 1$ avem $\left|y_n\left(t\right)\right| \le \|f\|$ $a.p.t.$ Să presupunem, prin absurd, că există $n_0 \in \mathbb{N}$, $A \in \sigma$ astfel încât $m\left(A\right) \ne 0$ şi $\left|y_{n_0}\left(t\right)\right| > \|f\|, \forall\, t \in A$. Fie funcția $x\left(t\right) = \chi_A\left(t\right) \operatorname{sign} y\left(t\right)$. Atunci $\|x\| = m\left(A\right)$ şi $y\left(t\right) = y_n\left(t\right)$, $\forall\, t \in A$.

Avem: $\|f\| m(A) \quad < \int\limits_A |y_m| \, dm = \int\limits_A |y| \, dm$

$$= f(x) \leq \|f\| \|x\| = \|f\| m(A),$$

ceea ce constituie o contradicție. Rămâne că $|y_n(t)| \leq \|f\|$ a. p. t.

Rezultă deci că:

$$y \in L^\infty, \ \|y\|_\infty = \operatorname{essup}|y| \leq \|f\| \ \ |f(x)| = \left| \int\limits_T x \, y \, dm \right| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 .$$

Avem, astfel $\|f\| = \|y\|_\infty$.

Teorema 18. *Pentru orice* $f \in \left(L^1\right)'$ *există şi este unic* $y \in L^\infty$ *astfel încât* $f(x) = \int_T x \, y \, dm$, $\left(x \in L^1\right)$.

Corespondența $f \mapsto y$ *este un izomorfism de spații liniare normate între* $\left(L^1\right)'$ *şi* L^∞. *Spunem că dualul lui* L^1 *este* L^∞ *şi scriem* $\left(L^1\right)' = L^\infty$. ■

4.9. Exemple şi exerciții

1). Fie pe $\mathbb{R}^m$ norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq m} |x_i|$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$. Fie $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ operatorul generat de matricea $\left(a_{ij}\right)_{1 \leq i, j \leq m}$. Fie $\|A\|_\infty = \sup\left\{ \|Ax\|_\infty : \|x\|_\infty \leq 1 \right\}$.

Să se arate că $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$.

2). Fie pe $\mathbb{R}^m$ norma $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

Fie $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ operatorul generat de matricea $(a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$.

Fie $\|A\|_1 = \sup\{ \|Ax\|_1 : \|x\|_1 \le 1 \}$.

Să se arate că $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.

3). Fie $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ un operator liniar şi $(a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, astfel încât $Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \le i \le m}$.

Fie $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$, $\|A\|_2 = \sup\left\{ \|Ax\|_2 : \|x\|_2 \le 1 \right\}$, unde $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)^{1/2}$.

Să se arate că:

i) $A \mapsto \|A\|_F$ este o normă pe $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$;

ii) $\|AB\|_F \le \|A\|_F \cdot \|B\|_F$, $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$;

iii) $\|A\|_F \le \|A\|_2$;

iv) Nu există p o normă pe $\mathbb{R}^m$ astfel încât:

$$\|A\|_F = \sup\{ p(Ax) : p(x) \le 1 \} \quad \left(A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \right).$$

4). Fie Y un spațiu liniar normat.

Să se arate că Y este spațiu Banach dacă şi numai dacă $\mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ este spațiu Banach.

5). Fie X, Y spații liniare normate, $X \ne \{0\}$.

Să se arate că dacă $\mathcal{L}(X, Y)$ este spațiu Banach, atunci Y este spațiu Banach.

6). Fie X,Y spații liniare normate. Să se arate că dacă $\dim \mathcal{L}(X,Y) < \infty$, atunci $\dim X < \infty$ şi $\dim Y < \infty$.

7). Fie $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, $p \geq 1$ şi $U : \ell^p \to s$ definit prin $U(x) = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$. (s este spațiul tuturor şirurilor se numere). Să se arate că:

i) $U(\ell^p) \subset \ell^p$ dacă şi numai dacă $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ este mărginit;

ii) Dacă $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit, atunci U este continuu şi $\|U\| = \sup\{|\lambda_n| : n \geq 1\}$;

iii) Să se arate că operatorul U este inversabil în $\mathcal{L}(\ell^p)$ dacă şi numai dacă $(1/\lambda_n)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit.

8). Fie z o funcție măsurabilă Lebesgue pe $[a,b]$ şi $T : L^2([a,b]) \to S([a,b])$ definit prin $T(x) = xz$. ($S([a,b])$ este spațiul tuturor funcțiilor măsurabile pe $[a,b]$. Spațiile considerate sunt presupuse ca fiind spații de clase de funcții egale a. p. t.). Să se arate că:

i) $T(L^2([a,b])) \subset L^2([a,b])$ dacă şi numai dacă funcția $z \in L^\infty([a,b])$ este esențial mărginită;

ii) Dacă $z \in L^\infty([a,b])$, atunci operatorul T este continuu şi $\|T\| = \text{essup}|z|$;

iii) Operatorul T este inversabil în $\mathcal{L}(L^2([a,b]))$ dacă şi numai dacă $1/z \in L^\infty([a,b])$.

9). Fie X,Y spații liniare normate şi $U : X \to Y$ un operator liniar. Să se arate că dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$x_n \in X$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, şirul $\left(U\left(x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, atunci operatorul U este continuu.

10). Fie $\alpha \in (0,1]$ şi $U : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ operatorul definit prin $U(x)(t) = x\left(t^\alpha\right)$, $\left(t \in [0,1]\right)$. Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi are norma $\|U\| = 1/\sqrt{\alpha}$.

11). Fie $a : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie $U : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatorul definit prin:

$$U(x)(s) = \int_0^1 a(s,t)x(t)\,dt \quad \left(s \in [0,1]\right).$$

Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi are norma $\|U\| = \max\limits_{0\le t\le 1} \int_0^1 |a(s,t)|\,dt$.

12). Fie $U : \ell^2 \to \ell^2$ operatorul definit prin:

$$U(x) = \left(x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\right),\ x = \left(x_n\right)_{n\ge 1}.$$

Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi are norma $\|U\| = 1$.

13). Fie $U : \ell^2 \to \ell^2$ operatorul definit prin:

$$U(x) = \left(0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\right),\ x = \left(x_n\right)_{n\ge 1}.$$

Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi are norma $\|U\| = 1$.

14). Fie $U : \ell^\infty \to \ell^\infty$ operatorul definit prin:

$$U(x) = \left(\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)/n\right)_{n\ge 1},\ x = \left(x_n\right)_{n\ge 1}.$$

Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi să se calculeze $\|U\|$.

15). Fie $U : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatorul definit prin:

$$U(x)(t)=\int_0^t x(s)\,ds \quad \left(t\in[0,1]\right).$$

Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi să se calculeze $\|U\|$.

16). Fie $U:C([0,1])\to C([0,1])$ operatorul definit prin $U(x)(t)=\sum_{k=0}^{3} C_3^k x(k/3)(1-t)^{3-k}$. Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi să se calculeze $\|U\|$.

17). Fie X spaţiu Banach , Y spaţiu liniar normat şi $T_n\in\boldsymbol{\mathcal{L}}(X,Y)$. Fie:

$$Z=\left\{x\in X:\left(T_n(x)\right)_n \text{ mãrginit}\right\},$$

$$W=\left\{x\in X:\left(\|T_n(x)\|\right)_n \text{ nemãrginit}\right\}.$$

Să se arate că:

i) $Z=X$ sau Z este de prima categorie Baire;

ii) $W=\varnothing$ sau W este de categoria a doua Baire.

18). Fie $a:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie:

$$X=\left(C([0,1]),\|\ \|_\infty\right) \text{ cu norma } \|x\|_\infty=\max_{0\le t\le 1}|x(t)|,$$

$$Y=\left(C([0,1]),\|\ \|_1\right) \text{ cu norma } \|x\|_1=\int_0^1|x(t)|\,dt\,.$$

Fie $U:X\to Y$ operatorul definit prin:

$$U(x)(s)=\int_0^1 a(s,t)x(t)\,dt \quad \left(s\in[0,1]\right).$$

Să se arate că operatorul U este liniar, continuu şi $\|U\|=\max_{0\le t\le 1}|a(s,t)|$.

19). Fie X un spaţiu liniar normat şi $f:X\to\mathbb{R}$ o aplicaţie liniară şi închisă. Să se arate că aplicaţia f este continuă.

20). Fie $f_n : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, definite prin:

$$f_n(x) = n\int_0^1 x(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} x(k/n).$$

Să se arate că:

i) $\|f_n\| = 2n$;

ii) Există $x \in C([0,1])$ ca $(f_n(x))_n$ să fie nemărginit.

21). Fie $a \in C([0,1])$ şi $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \int_0^1 a(t)x(t)\,dt\,.$$

Să se arate că f este liniară, continuă şi $\|f\| = \int_0^1 |a(t)|\,dt$.

22). Fie subspațiul $Z \subset \ell^2$ definit prin:

$$Z = \left\{ x = (\alpha_n)_{n\geq 1} : \sum_{n\geq 1} n^2 |\alpha_n|^2 < \infty \right\}.$$

Fie $U : Z \to \ell^2$ operatorul definit prin $U(x) = (n\alpha_n)_{n\geq 1}$. Să se arate că:

i) U este un operator închis;

ii) U nu este continuu;

iii) Z nu este un subspațiu închis în ℓ^2.

23). Fie $X = \left(\ell^p, \|\ \|_p\right)$ cu $p \geq 1$. Fie $d : \ell^p \to \mathbb{R}$ definită prin $d(x) = \sup\limits_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p}$, unde $x = (\alpha_n)_{n\geq 1}$.

Fie $f_n : X \to \mathbb{R}$ definită prin: $f_n(x) = \alpha_n$. Să se arate că:

i) d este o normă pe ℓ^p;

ii) (ℓ^p, d) este spațiu Banach;

iii) dacă $I : (\ell^p, d) \to X$, $I(x) = x$, atunci I^{-1} este continuu;

iv) f_n este liniară şi continuă.

24). Să se generalizeze afirmațiile din exercițiul precedent pentru spații Banach cu bază Schauder.

25). Fie $X \subset C([a,b])$ un subspațiu închis format din funcții derivabile cu derivată continuă. Atunci $\dim X < \infty$.

Soluție. Fie $U : X \to C([a,b])$ operatorul definit prin $U(x) = x'$. Operatorul U este închis şi, deoarece X este spațiu Banach în raport cu norma indusă din $C([a,b])$, $\| \ \|_\infty$, conform teoremei grafului închis, U este continuu.

Fie $A = \left\{x \in X : \|x\|_\infty \leq 1\right\}$. Conform celor precedente $U(A)$ este mărginită, adică există $M > 0$ astfel încât $\|x'\|_\infty \leq M$. Atunci A este închisă, mărginită, echicontinuă. Conform teoremei Arzela-Ascolli, mulțimea A este compactă. Din teorema lui Riesz rezultă că $\dim X < \infty$. □

26). Fie X şi Y spații Banach şi $U : X \to Y$ un operator liniar, continuu şi injectiv. Să se arate că:

există $M > 0$ astfel încât $\operatorname{dist}\left(0, U^{-1}(y)\right) \leq M\|y\| \ (y \in Y)$.

27). Să se arate că afirmația cuprinsă în exercițiul precedent este echivalentă cu teorema aplicației deschise.

28). Fie X un spațiu Banach şi spațiul $\mathbb{R}[x]$ cu norma

$\|p\| = \sup\left\{|p(x)| : x \in [a,b]\right\}$.

Fie $U : X \to \mathbb{R}[x]$ un operator liniar şi continuu.

Să se arate că $\dim U(X) < \infty$.

29). Fie X un spațiu liniar, p şi q norme pe X astfel încât (X, p) şi (X, q) sunt spații Banach.

Să se arate că dacă orice şir convergent la zero în raport cu p este mărginit în raport cu q, atunci p şi q sunt echivalente.

30). Fie X un spațiu Banach, Y şi Z subspații închise cu proprietatea că:

$$\forall\, x \in X,\ \exists!\, y \in Y \text{ şi } \exists!\, z \in Z \text{ astfel încât } x = y + z.$$

Să se arate că exită $\alpha > 0$ astfel încât $\|y\| \le \alpha \|x\|$, $\|z\| \le \alpha \|x\|$, $\forall\, x \in X$.

Soluție. Operatorii de proiecție $U : X \to Y$, $V : X \to Z$, $U(x) = y$, $V(x) = z$ sunt liniari, închişi şi deci continui. □ ▪

5

ELEMENTE DE TEORIE SPECTRALĂ

5.1. Spectrul unui operator liniar şi continuu

Fie X un spaţiu liniar normat peste corpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $U \in \mathcal{L}(X)$.

Definiţie. Se spune că numărul $\lambda \in \mathbb{K}$ este *regulat* pentru operatorul U dacă există $(U - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, unde $I : X \to X$ este operatorul identitate.

Observaţii.

1) În definiţia precedentă se cere deci ca $U - \lambda I : X \to X$ să fie o bijecţie, iar aplicaţia inversă să fie continuă.

Dacă X este spaţiu Banach, atunci λ este număr regulat pentru U dacă şi numai dacă $U - \lambda I$ este o bijecţie (vezi teorema aplicaţiei deschise).

2) Dacă $\dim X < \infty$, atunci λ este număr regulat pentru U dacă şi numai dacă $U - \lambda I$ este injectiv.

Dacă $X = \mathbb{C}^m$, iar U este generat de matricea A, atunci λ este regulat pentru U dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Dacă $X = \mathbb{R}^m$ şi ca mai sus operatorul U este generat de matricea A, iar polinomul caracteristic $\det(A - \lambda I)$ nu are rădăcini reale, atunci orice număr $\lambda \in \mathbb{R}$ este regulat pentru U.

Definiție. Complementara în $\mathbb{K}$ a mulțimii numerelor regulate pentru operatorul U se numeşte *spectrul* lui U şi se notează $\boldsymbol{S}(U)$.

Definiție. Se spune că $\lambda \in \mathbb{K}$ este *număr propriu* pentru operatorul U dacă există $x \in X$, $x \neq 0$, astfel încât $U(x) = \lambda x$.

Se spune atunci că x este *vector propriu* corespunzător numărului propriu λ.

Mulțimea numerelor proprii se numeşte *spectrul punctual* al lui U şi se notează $\boldsymbol{Sp}(U)$.

Observații.

1) Dacă λ este număr propriu pentru U, atunci $U - \lambda I$ nu este injectiv şi deci λ aparține spectrului lui U.

2) Dacă $\dim X < \infty$, atunci $\boldsymbol{Sp}(U) = \boldsymbol{S}(U)$.

3) Se poate întâmpla ca $\boldsymbol{Sp}(U) = \varnothing$.

4) Dacă $\lambda \in \boldsymbol{S}(U)$ şi $U - \lambda I$ este injectiv, atunci sau $U - \lambda I$ nu este surjectiv, sau $U - \lambda I$ este surjectiv dar $(U - \lambda I)^{-1}$ nu este continuu.

Aşa cum am mai observat, această ultimă situație nu se poate întâmpla dacă X este spațiu Banach.

Teorema 1. *Fie X un spațiu Banach şi $U \in \mathcal{L}(X)$. Atunci spectrul lui U este o mulțime compactă, nevidă dacă X este spațiu Banach complex.*

Demonstrație. Dacă $\lambda \in \mathbb{K}$ şi $|\lambda| > \|U\|$, atunci $\|\lambda^{-1}U\| < 1$ şi deci $I - \lambda^{-1}U$ este inversabil în $\mathcal{L}(X)$.

Rezultă că există $(U-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ şi deci λ este număr regulat pentru U. Spectrul operatorului U este deci inclus în mulţimea $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \le \|U\|\}$.

Pentru a demonstra că $S(U)$ este o mulţime închisă, fie $\lambda_0 \notin S(U)$. Scriem:

$$\begin{aligned} U-\lambda I &= U-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I \qquad (5.1.1) \\ &= (U-\lambda_0 I)\left(I-(\lambda-\lambda_0)(U-\lambda_0 I)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Notăm $r = \dfrac{1}{\left\|(U-\lambda_0 I)^{-1}\right\|}$. Dacă $|\lambda-\lambda_0| < r$, atunci $\left\|(\lambda-\lambda_0)(U-\lambda_0 I)^{-1}\right\| < 1$ şi deci $I-(\lambda-\lambda_0)(U-\lambda_0 I)^{-1}$ este inversabil. Din (5.1.1) rezultă că $U-\lambda I$ este inversabil.

Recapitulând, dacă $|\lambda-\lambda_0| < r$, atunci există:

$$(U-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

$$(U-\lambda I)^{-1} = \left(I-(\lambda-\lambda_0)(U-\lambda_0 I)^{-1}\right)^{-1}(U-\lambda_0 I)^{-1}. \qquad (5.1.2)$$

Deci, $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda-\lambda_0| < r\} \subset \mathbb{K} \setminus S(U)$, dacă $\lambda_0 \notin S(U)$.

Prin urmare, $S(U)$ este o mulţime închisă. Fiind mărginită şi închisă, $S(U)$ este o mulţime compactă.

Apoi din (5.1.2) rezultă că:

$$|\lambda-\lambda_0| < r \;\Rightarrow$$

$$(U-\lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n (U-\lambda_0 I)^{-n-1}. \qquad (5.1.3)$$

Pentru $f \in \left(\mathcal{L}(X)\right)'$, definim $g : \mathbb{K} \setminus \boldsymbol{S}(U) \to \mathbb{K}$ prin $g(\lambda) = f\left((U - \lambda I)^{-1}\right)$.

Din (5.1.3) rezultă că:

$$|\lambda - \lambda_0| < r \Rightarrow$$

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f\left((U - \lambda_0 I)^{-n-1}\right). \tag{5.1.4}$$

Afirmaţia arată că funcţia g este analitică pe $\mathbb{K} \setminus \boldsymbol{S}(U)$.

Să presupunem că X este spaţiu Banach complex şi că $\boldsymbol{S}(U) = \varnothing$.

Funcţia g este atunci analitică pe $\mathbb{C}$.

Pentru $\lambda_0 = 0$ relaţia (5.1.4) este:

$$|\lambda| < \frac{1}{\|U^{-1}\|} \Rightarrow g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f\left(U^{-n-1}\right).$$

Funcţia g fiind analitică pe $\mathbb{C}$, dezvoltarea precedentă este valabilă pe $\mathbb{C}$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f\left(U^{-n-1}\right) \ (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{5.1.5}$$

În particular, din relaţia precedentă reţinem că $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\lambda^n U^{-n-1}\right) = 0$, pentru orice $f \in \left(\mathcal{L}(X)\right)'$.

Din teorema Banach-Steinhauss deducem că pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{C}$ şirul $\left\{\lambda^n U^{-n-1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit în $\mathcal{L}(X)$, adică există $M(\lambda) > 0$ astfel încât $\left\|\lambda^n U^{-n-1}\right\| \le M(\lambda)$ $(n \in \mathbb{N})$. De aici rezultă că $|\lambda^n| / \|U\|^n \le M(\lambda)\|U\|$ $(n \in \mathbb{N})$.

Afirmația precedentă este însă contradictorie, pentru că şirul $\left\{\left(|\lambda|/\|U\|\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit doar dacă $|\lambda|\le\|U\|$.

Astfel rezultă că $\boldsymbol{S}(U)\ne\varnothing$. □

Lemă. *Fie X un spațiu liniar normat şi $U\in\boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$. Atunci şirul $\left\{\|U^n\|^{1/n}\right\}_{n\ge1}$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty}\|U^n\|^{1/n}=\inf_{n\ge1}\|U^n\|^{1/n}.$$

Demonstrație. Din $\|U^n\|\le\|U\|^n$ reținem că şirul considerat este mărginit. Fie $r=\inf_{n\ge1}\|U^n\|^{1/n}$ şi $\varepsilon>0$.

Există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $\|U^{n_0}\|^{1/n_0}<r+\varepsilon$, deci:

$$\|U^{n_0}\|<(r+\varepsilon)^{n_0}. \tag{5.1.6}$$

Pentru $n\ge n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$, scriem $n=cn_0+d$, cu $c,d\in\mathbb{N}$ şi $d<n_0$.

Atunci $U^n=\left(U^{n_0}\right)^c U^d$, de unde $\|U^n\|\le\|U^{n_0}\|^c\|U\|^d$.

Din (5.1.6) avem $\|U^n\|\le(r+\varepsilon)^{n_0c}\|U\|^d$.

Deci $\|U^n\|^{1/n}\le(r+\varepsilon)^{1-d/n}\|U\|^{d/n}$.

Astfel rezultă că $\limsup_{n\to\infty}\|U^n\|^{1/n}\le r+\varepsilon$ şi atunci avem inegalitățile:

$$r\le\liminf_{n\to\infty}\|U^n\|^{1/n}\le\limsup_{n\to\infty}\|U^n\|^{1/n}\le r+\varepsilon.$$

Deoarece, în relația precedentă, ε este arbitrar, rezultă că șirul $\left\{\left\|U^n\right\|^{1/n}\right\}_{n\geq 1}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|U^n\right\|^{1/n}=r$. □

Observație. Subliniem că lema precedentă este adevărată pentru spații normate reale sau complexe.

Teorema 2. *Fie X un spațiu Banach complex și $U\in\mathcal{L}(X)$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|U^n\right\|^{1/n}=\sup\left\{|\lambda|:\lambda\in S(U)\right\} \tag{5.1.7}$$

Demonstrație. Remarcăm că din teorema precedentă se știe că $S(U)\neq\varnothing$ și $S(U)\subset\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq\|U\|\right\}$.

Cu notația din teorema precedentă, fie $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|U^n\right\|^{1/n}$ și fie $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|>r$.

Există atunci $m\in\mathbb{N}$, astfel încât $\left\|U^m\right\|^{1/m}<|\lambda|$. Atunci $\left\|\frac{1}{\lambda^m}U^m\right\|<1$ și deci operatorul $U^m-\lambda^m I$ este inversabil.

Din $U^m-\lambda^m I=(U-\lambda I)\left(\sum\limits_{k=0}^{m-1}\lambda^k U^{m-k}\right)$ rezultă că odată cu $U^m-\lambda^m I$, operatorul $U-\lambda I$ este surjectiv.

Din injectivitatea lui $U^m-\lambda^m I$, rezultă apoi injectivitatea operatorului $U-\lambda I$.

În concluzie, operatorul $U-\lambda I$ este inversabil, deci $\lambda\in S(U)\Rightarrow|\lambda|\leq r$. Rezultă că:

$$\sup\left\{|\lambda|:\lambda\in S(U)\right\}\leq r. \tag{5.1.8}$$

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| > \|U\|$. Atunci $(U - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} U^n$.

Fie $f \in (\mathcal{L}(X))'$ şi $g : \mathbb{C} \setminus \boldsymbol{S}(U) \to \mathbb{C}$, definită prin $g(\lambda) = f\left((U - \lambda I)^{-1}\right)$. Atunci are loc dezvoltarea Laurent:

$$|\lambda| > \|U\| \Rightarrow g(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} f(U^n).$$

Din olomorfia funcţiei g pe $\mathbb{C} \setminus \boldsymbol{S}(U)$ (vezi teorema 1), rezultă că dezvoltarea Laurent precedentă este valabilă pe $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \rho\} \subset \mathbb{C} \setminus \boldsymbol{S}(U)$ (unde $\rho = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \boldsymbol{S}(U)\}$:

$$|\lambda| > \rho \Rightarrow g(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} f(U^n).$$

Ca mai sus, rezultă că $\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}} f(U^n)\right) = 0$, pentru orice $f \in (\mathcal{L}(X))'$, de unde deducem că şirul $\left\{\frac{1}{\lambda^{n+1}} U^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit în $\mathcal{L}(X)$, adică:

există $M = M(\lambda) > 0$ astfel încât $\left\|\frac{1}{\lambda^{n+1}} U^n\right\| \le M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\|U^n\|^{1/n} \le |\lambda|^{(n+1)/n} M^{1/n}$.

Deci $\lim_{n \to \infty} \|U^n\|^{1/n} \le \lambda$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| > \rho$.

Rezultă că $\lim_{n \to \infty} \|U^n\|^{1/n} \le \rho$. Din (5.1.8) deducem în fine că $\lim_{n \to \infty} \|U^n\|^{1/n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \boldsymbol{S}(U)\}$. □

Observație. Numărul $r = \sup\{\,|\lambda| : \lambda \in \boldsymbol{S}(U)\}$ se va numi *raza spectrului* operatorului U.

Avem deci relațiile următoare:

$$r \leq \|U\|,$$

$$\boldsymbol{S}(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}. \qquad \square$$

5.2. Spectrul unui operator compact

Definiție. Fie $U \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$ şi $\lambda \in \boldsymbol{Sp}(U)$. Se notează $E_\lambda = \{x \in X : U(x) = \lambda x\}$. Mulțimea E_λ este atunci un subspațiu închis numit *subspațiu propriu* corespunzător numărului propriu λ.

Observație. Avem $U(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Teorema 3. *Fie X un spațiu liniar normat şi $U \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$ un operator compact.*

1. *Dacă* $\dim X = \infty$, *atunci* $0 \in \boldsymbol{S}(U)$;

2. *Dacă* $0 \neq \lambda \in \boldsymbol{S}(U)$, *atunci λ este număr propriu pentru U. Subspațiul propriu E_λ are dimensiune finită;*

3. *Spectrul lui U este o mulțime cel mult numărabilă ale cărei puncte, cu excepția eventual a lui zero, sunt izolate.*

Dacă $\boldsymbol{S}(U)$ este infinită şi $\boldsymbol{S}(U) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Demonstrație. (1). Dacă pentru operatorul compact U, numărul zero ar fi regulat, atunci U ar fi un homeomorfism.

Mulțimea $\overline{U(B(0,1))}$ ar fi atunci o vecinătate compactă a originii în X. Conform teoremei lui Riesz, spațiul X ar avea dimensiunea finită, ceea ce ar contrazice ipoteza.

(2). Fie $\lambda \neq 0$, $\lambda \in S(U)$. Dacă $U - \lambda I$ ar fi injectiv, atunci, conform teoremei Riesz-Schauder, $I - (1/\lambda)U$ ar fi inversabil şi deci λ ar fi număr regulat pentru U, ceea ce contrazice ipoteza.

Tot din teorema Riesz-Schauder rezultă că $\dim E_\lambda < \infty$.

(3). Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ mulțimea $\{\lambda \in S(U) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ este finită.

Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât mulțimea $\{\lambda \in S(U) : |\lambda| \geq \varepsilon_0\}$ este infinită. Există atunci $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ un şir în $S(U)$, astfel încât $\lambda_n \neq \lambda_m$ pentru $n \neq m$ şi $|\lambda_n| \geq \varepsilon$, $\forall n$.

Notăm $E_n = \{x \in X : U(x) = \lambda_n x\}$.

Fie $X_n = Sp\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\}$.

Deoarece pentru $n \neq m$ avem $E_n \cap E_m = \{0\}$, rezultă că $X_n \subset X_{n+1}$.

Din $U(E_k) \subset E_k$ şi $(U - \lambda_{n+1} I)(E_{n+1}) = \{0\}$ rezultă că $(U - \lambda_{n+1} I)(X_{n+1}) \subset X_n$, adică:

$$\left(I - \frac{1}{\lambda_{n+1}} U\right)(X_{n+1}) \subset X_n .$$

Din această incluziune şi din lema cvasiperpendicularei, deoarece subspațiile X_n sunt închise (sunt de dimensiune finită), rezultă că există $\|a_{n+1}\| = 1$ şi astfel încât:

$$\left\| \frac{1}{\lambda_{n+1}} U\left(a_{n+1}\right) - \frac{1}{\lambda_{n+1}} U\left(x\right) \right\| \geq \frac{1}{2}, \text{ pentru orice } x \in X_n .$$

De aici rezultă:

$$\left\| U\left(a_{n+1}\right) - U\left(x\right) \right\| \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0 \ \left(x \in X_n\right).$$

Cu o construcție prin inducție, există $a_n \in X_n$, astfel încât

$$\left\| a_n \right\| = 1 \text{ şi } n \neq m \Rightarrow \left\| U\left(a_n\right) - U\left(a_m\right) \right\| \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0 .$$

Ultima afirmație este în contradicție cu compacitatea operatorului U. Rămâne deci că pentru orice $\varepsilon > 0$ mulțimea $\left\{ \lambda \in \boldsymbol{S}\left(U\right) : \left|\lambda\right| \geq \varepsilon \right\}$ este finită (eventual vidă).

Din incluziunea:

$$\boldsymbol{S}\left(U\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda \in \boldsymbol{S}\left(U\right) : \left|\lambda\right| \geq \frac{1}{k} \right\} \cup \left\{0\right\},$$

rezultă că spectrul operatorului U este o mulțime cel mult numărabilă.

Dacă $\dim X = \infty$, atunci avem egalitatea:

$$\boldsymbol{S}\left(U\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda \in \boldsymbol{S}\left(U\right) : \left|\lambda\right| \geq \frac{1}{k} \right\} \cup \left\{0\right\}$$

Apoi, afirmațiile:

orice număr nenul din spectru este punct izolat al spectrului; dacă $\boldsymbol{S}\left(U\right)$ *este infinită, dacă* $\boldsymbol{S}\left(U\right) = \left\{\lambda_n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, *atunci* $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ sunt consecințe imediate ale celor precedente. □

5.3. Exemple şi exerciţii

1). Fie $p>1$, $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere complexe şi $U:\ell^p \to \ell^p$, operatorul definit prin $U(x)=\{\lambda_n x_n\}_{n\geq 1}$, unde $x=\{x_n\}_{n\geq 1}\in \ell^p$.

Dacă $e_n=\{\delta_j^n\}_{j\geq 1}$, atunci $U(e_n)=\lambda_n e_n$ şi deci:

$$S(U)\subset \overline{\{\lambda_n : n=1,2,3,\cdots\}}.$$

Dacă $\lambda\notin \overline{\{\lambda_n : n=1,2,3,\cdots\}}$, atunci există $\varepsilon>0$ astfel încât $|\lambda-\lambda_n|\geq\varepsilon$ pentru orice n.

Şirul $\left\{\dfrac{1}{\lambda-\lambda_n}\right\}_{n\geq 1}$ este atunci mărginit, operatorul $U-\lambda I$ este inversabil şi avem:

$$(U-\lambda I)^{-1}(x)=\left\{\frac{1}{\lambda_n-\lambda}x_n\right\}_{n\geq 1}.$$

Aceasta arată că λ este număr regulat pentru U.

Rezultă că $S(U)=\overline{\{\lambda_n : n=1,2,3,\cdots\}}$.

Se ştie că U este compact dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$, numărul zero este deci în spectru şi este număr propriu dacă şi numai dacă există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\lambda_k=0$.

2). Fie $U:\ell^2\to\ell^2$ operatorul definit prin:

$$U(x)=(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots).$$

Avem $\|U^n\|=1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\|U^n\|^{1/n}=1$.

Atunci $S(U)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq 1\}$.

Pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ ecuația $U(x) - \lambda x = 0$ are numai soluția $x = 0$, deci operatorul nu are valori proprii.

Operatorul nu este surjectiv, deci $0 \in \boldsymbol{S}(U)$.

Dacă $|\lambda| \leq 1$, $\lambda \neq 0$, atunci ecuația $U(x) - \lambda x = e_1$, unde $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$, are soluția $x = \left(-1/\lambda^n\right)_{n \geq 1}$.

Pentru $|\lambda| < 1$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|\lambda|^n} = \infty$, iar pentru $|\lambda| = 1$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|\lambda|^n} = 1$.

Vectorul x nu aparține spațiului ℓ^2 şi deci $U - \lambda I$ nu este surjectiv.

Deci, $\boldsymbol{S}(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Afirmația rămâne adevărată dacă considerăm $p > 1$ şi $U : \ell^p \to \ell^p$.

3). Fie $p > 1$ şi $U : \ell^p \to \ell^p$ operatorul definit prin $U(x) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$.

Avem $\lim\limits_{n \to \infty} \left\|U^n\right\|^{1/n} = 1$, deci $\boldsymbol{S}(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Pentru $|\lambda| < 1$, ecuația $U(x) = \lambda x$ are soluția $x = \left(\xi_1, \lambda \xi_1, \cdots, \lambda^n \xi_1, \cdots\right)$.

Deoarece $|\lambda| < 1$, vectorul x aparține spațiul ℓ^p şi, prin urmare, λ este număr propriu.

Atunci $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \boldsymbol{S}(U)$ şi, cum spectrul este o mulțime închisă, obținem $\boldsymbol{S}(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

4). Fie $X=\left(C\left(\left[0,1\right]\right),\|\ \|\right)$, $\|x\|=\max\left\{\left|x\left(t\right)\right|:t\in\left[0,1\right]\right\}$. Fie $U:X\to X$, $U\left(x\right)\left(s\right)=\int_0^1 stx\left(t\right)dt$.

Operatorul *U* este de rang finit şi deci compact.

Conform teoremei 3, în spectrul lui *U*, în afară de 0, se mai află doar numere proprii. Pentru un asemenea număr propriu λ există $x\neq 0$ aşa ca $U\left(x\right)=\lambda x$.

Elementul *x* este atunci de forma αs, unde $\alpha=\int_0^1 tx\left(t\right)dt$.

Rezultă că $\lambda=\int_0^1 t^2dt=1/3$ şi deci $S\left(U\right)=\left\{0;\,1/3\right\}$.

5). Fie *X* spaţiul din exemplul precedent şi $U:X\to X$, $U\left(x\right)\left(s\right)=\int_0^1\left(s+t\right)x\left(t\right)dt$.

Operatorul *U* este de rang finit şi deci compact.

Conform teoremei 3, $0\in S\left(U\right)$, iar în spectru se mai află doar numere proprii. Dacă $\lambda\neq 0$ este un număr propriu, iar *x* este un vector propriu corespunzător atunci $x=\alpha s+\beta$.

Rezultă că $\lambda\alpha=\beta+\alpha/2$, $\lambda\beta=\alpha/3+\beta/2$.

Cum $\alpha\neq 0$, rezultă că $\left(\lambda-1/2\right)^2=1/3$ şi deci $\lambda=1/2\pm\sqrt{3}/3$.

În concluzie, $S\left(U\right)=\left\{0;\,1/2\pm\sqrt{3}/3\right\}$.

6). Fie $T:C\left(\left[0,1\right]\right)\to C\left(\left[0,1\right]\right)$, operatorul definit prin $T\left(x\right)\left(t\right)=tx\left(t\right)+\int_0^t x\left(s\right)ds$. Fie pe $C\left(\left[0,1\right]\right)$ norma uzuală max.

Să se arate că:

i) $\|T\|=2$;

ii) $\lambda=0$ nu este număr propriu pentru *U*;

iii) *T* nu este compact.

Soluție. (i): Se arată, mai întâi, că $\|T\| \leq 2$ şi luând $x_0 = 1$ va rezulta $\|T\| = 2$.

(ii): Dacă $T(x) = 0$, atunci x este derivabilă şi $tx'(t) + 2x(t) = 0$. Avem şi $x(0) = 0$.

Pe un interval $[\varepsilon, 1] \subset (0,1]$, funcția x trebuie să fie de forma $x(t) = k/t^2$, funcție care nu se poate prelungi prin continuitate în $t = 0$.

Din $T(X) \subset \{y \in C([0,1]) : y(0) = 0\}$, rezultă că $0 \in S(T)$.

(iii): Dacă T ar fi compact, ar rezulta că operatorul $S(x)(t) = tx(t)$ este compact.

Necompacitatea operatorului S se probează considerând şirul mărginit $(t^n)_{n \geq 1}$. □ ▪

6

SPAȚII HILBERT[1]

Un spațiu Hilbert este un spațiu liniar normat complet a cărui normă provine dintr-un produs scalar. Spațiile Hilbert reprezintă generalizarea spațiilor euclidiene.

Spațiile Hilbert şi operatorii definiți pe aceste spații au aplicații importante în mecanica cuantică, mecanica fluidelor, teoria probabilităților, ecuații cu derivate parțiale, ecuații integrale, analiză armonică şi în alte domenii.

În acest capitol prezentăm conceptele, metodele şi rezultatele esențiale ale teoriei spațiilor Hilbert.

6.1. Spații cu produs scalar

Definiție. Fie H un spațiu liniar peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. O aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ se numeşte *produs scalar* (sau *produs interior*) dacă verifică următoarele axiome:

i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (x, y \in H)$;

ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x, y, z \in H)$;

iii) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

Spațiul liniar H împreună cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se numeşte *spațiu prehilbertian* (sau *spațiu cu produs scalar*).

---

[1] **David Hilbert** (23 ianuarie 1862 - 14 februarie 1943).

Exemple.

1) Fie spațiul liniar $\mathbb{K}^n$. Definim $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_k}$ pentru oricare $x = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ şi $y = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ din $\mathbb{K}^n$.

Se verifică imediat că este $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produs scalar pe $\mathbb{K}^n$.

Spațiul prehilbertian $(\mathbb{K}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este cunoscut ca *spațiul unitar n-dimensional*.

2) Fie X spațiul liniar al şirurilor $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de scalari din $\mathbb{K}$, cu proprietatea că $\alpha_n = 0$, cu excepția unui număt finit de indici n. Dacă definim $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}$, unde $x = (\alpha_n)_{n\geq 1}$ şi $y = (\beta_n)_{n\geq 1}$, atunci $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este produs scalar. Alte produse scalare pe X sunt: $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cdot \alpha_n \overline{\beta_n}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \alpha_n \overline{\beta_n}$.

3) Fie spațiul liniar $C([a,b])$ al funcțiilor continue pe intervalul închis $[a,b]$, $a < b$. Definim $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$, pentru $f, g \in C([a,b])$. Spațiul $(C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este numit *spațiul prehilbertian al funcțiilor continue pe* $[a,b]$.

Propoziție. *Fie $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu prehilbertian. Atunci produsul scalar are următoarele proprietăți:*

i) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x, y, z \in H)$;

ii) $\langle 0, y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0 \quad (x, y \in H)$;

iii) $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$, $\forall\ z \in H \ \Rightarrow\ x = y$.

Demonstrație. Exercițiu. □

Propoziție (Inegalitatea Cauchy-Schwarz). *Oricare ar fi* $x, y \in H$ *, este adevărată inegalitatea:*

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle .$$

Demonstrație. Fie $x, y \in H$. Dacă $x = 0$ sau $y = 0$, atunci inegalitatea este evidentă. Presupunem că $\langle y, y\rangle > 0$.

Atunci avem:

$$0 \le \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \left|\lambda\right|^2 \langle y, y\rangle .$$

Luând $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$, obținem:

$$0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\langle y, y\rangle}, \text{ adică}$$

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \quad \left(x, y \in H\right).$$

(*Inegalitatea Cauchy-Schwarz*) □

Propoziție. *Oricare spațiu prehilbertian este spațiu liniar normat în raport cu norma* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Demonstrație. Verificăm axiomele normei:

i) $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$;

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \left(\alpha \in \mathbb{K}, x \in H\right)$.;

iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \;\left(x, y \in H\right)$.

(i): Din definiții avem: $\|x\| = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(ii): Din definiții şi proprietățile produsului scalar avem:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \|x\|^2} = |\alpha|\|x\| .$$

(iii): Rezultă din inegalitatea Cauchy-Schwarz astfel.

Dacă $x, y \in H$, atunci:

$$\begin{aligned} 0 \le \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \left|\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\right| \\ &= \left|\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle\right| \\ &= \left|\langle x,x\rangle + 2\left|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\right| + \langle y,y\rangle\right| \\ &\le \langle x,x\rangle + 2\left|\langle x,y\rangle\right| + \langle y,y\rangle \\ &\le \langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2. \end{aligned}$$

Deci $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \left(x, y \in H\right)$. □

Observații.

1) Vom spune că într-un spațiu prehilbertian *norma este generată de produsul scalar*.

2) Toate noțiunile şi rezultatele de la spațiile liniare normate sunt valabile pentru spațiile prehilbertiene.

3) *Inegalitatea Cauchy-Schwarz,* numită şi *inegalitatea Cauchy-Schwarz-Bunyakowski,* se poate scrie acum astfel:

$$\left|\langle x,y\rangle\right| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad \left(x, y \in H\right).$$

Propoziție. *Fie* $\left(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ *un spațiu prehilbertian. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$.

Demonstrație. Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz-Bunyakowski, avem:

$$\begin{aligned}\left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\right| &= \left|\langle x_n - x, y_n - y\rangle + \langle x, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle\right| \\ &\le \left|\langle x_n - x, y_n - y\rangle\right| + \left|\langle x, y_n - y\rangle\right| + \left|\langle x_n - x, y\rangle\right| \\ &\le \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|.\end{aligned}$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\right| = 0$. □

Propoziție (Legea paralelogramului). *Dacă H este spațiu prehilbertian, atunci*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \left(x, y \in H\right).$$

(*Legea paralelogramului*)

Demonstrație. Fie $x, y \in H$. Avem egalitățile următoare:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),\end{aligned}$$

adică $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. □

Propoziție (Identitatea de polarizare). *Fie H un spațiu prehilbertian complex. Atunci, pentru fiecare $x, y \in H$, avem:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\cdot\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right].$$

(*Identitatea de polarizare*)

Demonstrație. Pentru $x, y \in H$, avem identitatea:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \tag{6.1.1}$$

Înlocuim pe y, pe rând, cu $-y, iy, -iy$ şi obținem:

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle,$$

$$\|x+iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-i\langle x,y\rangle+i\langle y,x\rangle,$$

$$\|x-iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+i\langle x,y\rangle-i\langle y,x\rangle.$$

Apoi,

$$-\|x-y\|^2=-\|x\|^2-\|y\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle, \tag{6.1.2}$$

$$i\|x+iy\|^2=i\|x\|^2+i\|y\|^2+\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle \tag{6.1.3}$$

$$-i\|x-iy\|^2=-i\|x\|^2-i\|y\|^2+\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle \tag{6.1.4}$$

Dacă adunăm identitățile (6.1.1), (6.1.2), (6.1.3) şi (6.1.4) obținem $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2=4\langle x,y\rangle$. □

Observație. Dacă, într-un spațiu liniar normat complex *X*, norma verifică legea paralelogramului, atunci ea este generată de produsul scalar:

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\cdot\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right].$$

6.2. Ortogonalitate. Baze ortonormate

Definiție. Fie $x,y\in H$. Elementul x este *ortogonal pe elementul* y dacă $\langle x,y\rangle=0$. Aceasta se notează $x\perp y$.

O mulțime $A\subset H$ se numeşte *ortogonală*, dacă $x\perp y$, pentru $x,y\in A,\ x\neq y$.

Un şir $(x_n)_n$ de elemente din H se numeşte *ortogonal*, dacă $x_i\perp x_j$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,3,\cdots)$.

Un element $x \in H$ se numeşte *ortogonal pe o mulțime* $A \subset H$, dacă $x \perp a$, pentru oricare $a \in A$. Notăm $x \perp A$ şi $A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\}$. Definim $A^{\perp\perp} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Fie A şi B submulțimi ale spațiului prehilbertian H.

Mulțimea A se numeşte *ortogonală pe mulțimea* B, dacă $a \perp b$ $\left(a \in A, b \in B\right)$.

Propoziție. *Fie* $\left(H, \langle \cdot,\cdot \rangle\right)$ *un spațiu prehilbertian. Atunci:*

i) dacă $x, y \in H$ *şi* $x \perp y$, *atunci* $y \perp x$;

ii) dacă $x \in H$ *şi* $x \perp x$, *atunci* $x = 0$;

iii) $x \perp 0$, *pentru oricare* $x \in H$;

iv) dacă $x \in H$ *şi* $x \perp H$, *atunci* $x = 0$;

v) dacă $x, y_k \in H$ *astfel încât* $x \perp y_k$, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ *şi* $\alpha_k \in \mathbb{C}$, *atunci* $x \perp \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k\right)$;

vi) dacă $x \in H$, $y_n \in H$ *astfel încât* $x \perp y_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ *şi* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$, *atunci* $x \perp y$.

Demonstrație. Exercițiu. □

Propoziție. *Dacă* A *şi* B *sunt submulțimi ale unui spațiu prehilbertian* H, *atunci:*

i) $A^{\perp}$ *este subspațiu liniar închis al lui* H;

ii) $A \subseteq A^{\perp\perp}$;

iii) dacă $A \subseteq B$, *atunci* $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$;

iv) $\left(A^{\perp\perp}\right)^{\perp} = A^{\perp}$;

v) $A^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{Sp}\, A}\right)^{\perp}$.

Demonstrație. Exercițiu. □

Exemplu. În spațiul prehilbertian al funcțiilor continue pe $[-\pi,\pi]$, considerăm şirurile $x_n(t)=\sin(nt)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ şi $y_n(t)=\cos(nt)$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$.

Aceste şiruri sunt ortogonale, adică, pentru $m\neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\sin(nt)\,dt=0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\cos(nt)\,dt=0\,.$$

Teorema 1 (Teorema lui Pitagora). *Fie* $x,y\in H$. *Dacă* $x\perp y$, *atunci* $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Demonstrație. Fie $x,y\in H$. Dacă $x\perp y$, atunci:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2+\|y\|^2.\end{aligned}$$

Deci,

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\ \ (x,y\in H).$$

(*Teorema lui Pitagora*) □

Corolar. *Dacă* $x_1,x_2,\cdots,x_n\in H$ *sunt ortogonale, atunci:*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2\ .$$

(*Teorema lui Pitagora generalizată*)

Corolar. *Dacă* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$ *sunt elemente nenule ortogonale, atunci ele sunt liniar independente.*

Demonstrație. Fie $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$ elemente nenule ortogonale. Presupunem că există $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$. Atunci elementele $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots, \alpha_n x_n \in H$ sunt ortogonale şi avem:

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\| \alpha_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \alpha_k \right|^2 \left\| x_k \right\|^2 .$$

Din $\|x_k\| \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$ şi $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \|x_k\|^2 = 0$, rezultă $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$. □

Definiție. O mulțime $A \subset H$ se numeşte *ortonormată*, dacă este ortogonală şi $\|x\| = 1$ $(x \in A)$.

Un şir $(x_n)_n$ de elemente din H se numeşte *ortonormat*, dacă $x_i \perp x_j$ $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \cdots)$ şi $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Observații.

1) Un şir $(x_n)_n$ de elemente din H este *ortonormat* dacă şi numai dacă $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, \cdots)$, unde δ_{ij} este *simbolul lui Kronecker*.

2) O mulțime $A \subset H$ se numeşte *ortonormată* dacă şi numai dacă $\langle x, y \rangle = 0$, dacă $x, y \in A$, $x \neq y$ şi $\langle x, x \rangle = 1$, pentru oricare $x \in A$.

3) Dacă $(x_n)_n$ este un şir ortogonal de elemente nenule, atunci şirul $(y_n)_n$, unde $y_n = x_n / \|x_n\|$, este ortonormat.

Teorema 2 (Egalitatea lui Bessel). *Dacă* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *sunt elemente ortonormate dintr-un spațiu prehilbertian* H *, atunci:*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \quad (x \in H).$$

(*Egalitatea lui Bessel*)

Demonstrație. Fie $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$ *și* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Atunci $\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$. Apoi,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x \rangle - \langle x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\langle x, x_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x, x_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \overline{\langle x, x_k \rangle} + \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \overline{\langle x, x_k \rangle} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\langle x, x_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x, x_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left[\langle x, x_k \rangle - \alpha_k \right] \left[\overline{\langle x, x_k \rangle - \alpha_k} \right]$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle - \alpha_k|^2.$$

Pentru $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ avem:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \quad (x \in H). \qquad \square$$

Observație. Din egalitatea lui Bessel, obținem imediat:

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\langle x, x_k \rangle\right|^2 \le \|x\|^2 \ \ (x \in H).$$

(*Inegalitatea lui Bessel*)

Corolar. *Dacă* $(x_n)_n$ *este un şir ortonormat de elemente dintr-un spațiu prehilbertian* H *, atunci:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, x_n \rangle\right|^2 \le \|x\|^2 \ \ (x \in H).$$

În particular, $\lim\limits_{n \to \infty} \langle x, x_n \rangle = 0$.

Observație. Alegerea numerelor $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ în demonstrația teoremei de mai sus minimizează norma $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|$, care ne dă *cea mai bună aproximare* a elementului x printr-o combinație liniară de elemente ortonormate $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Teorema 3 (Procedeul Gram-Schmidt). *Dacă* $(y_n)_n$ *este un şir de elemente liniar independente într-un spațiu prehilbertian H, atunci există un şir ortonormat* $(x_n)_n$ *în H astfel încât* $\mathrm{Sp}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \mathrm{Sp}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ *pentru oricare* n.

Demonstrație. Definim şirul $(x_n)_n$ în mod inductiv.

Fie $x_1 = y_1 / \|y_1\|$. Presupunem că au fost definite $n-1$ elementele ortonormate $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ care îndeplinesc condiția $\mathrm{Sp}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} = \mathrm{Sp}\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Apoi, definim un element x_n care să fie o combinație liniară de

elementele $y_1, y_2, \cdots, y_n$ (sau, echivalent, de elementele $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y_n$) şi ortogonal pe $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$.

Pentru aceasta, fie elementul $z = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n, x_k \rangle x_k$.

Atunci $z \neq 0$ şi $z \perp \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$. Definim $x_n = z / \|z\|$. Se verifică faptul că fiecare combinație liniară de elementele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ este, de asemenea, combinație liniară de elementele $y_1, y_2, \cdots, y_n$, şi invers. □

Corolar. *Un spațiu prehilbertian de dimensiune finită* n *are o bază ortonormată* $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

Spații Hilbert

Definiție. Un spațiu prehilbertian *complet* (în raport cu norma generată de produsul scalar) se numeşte *spațiu Hilbert*.

Observație. Un spațiu Hilbert este, prin urmare, un spațiu Banach în care norma este generată de un produs scalar.

Propoziție. *Fie* H *un spațiu Hilbert şi* $(x_n)_n$ *un şir ortonormat de elemente din* H*. Atunci, pentru oricare* $x \in H$*, seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ *este convergentă.*

Demonstrație. Notăm $s_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i$ şi arătăm că şirul $(s_n)_n$ este convergent. Avem, pentru $n \geq 1$ şi $p > 0$,

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} \langle x, x_i \rangle x_i\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |\langle x, x_i \rangle|^2 .$$

Apoi, ştim că $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x, x_i\rangle\right|^2 \leq \|x\|^2$. Astfel, dacă $\varepsilon > 0$, există N astfel încât pentru $n > N$ şi $p > 0$ avem $\sum_{i=n+1}^{n+p}\left|\langle x, x_i\rangle\right|^2 < \varepsilon^2$, adică $\left\|s_{n+p} - s_n\right\| < \varepsilon$.

Prin urmare, $\left(s_n\right)_n$ este şir Cauchy şi, întrucât H este complet, şirul $\left(s_n\right)_n$ converge la $y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n$. □

Observație. $\langle x - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n, x_k\rangle = 0$, $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Definiție. O *bază ortonormată* pentru un spațiu Hilbert H este o submulțime B a lui H ortonormată maximală.

Teorema 4. *Fiecare spațiu Hilbert are o bază ortonormată.*

Demonstrație. Se aplică lema lui Zorn. □

Exemple.

1) Fie $L^2_{\mathbb{C}}\left(\left[0, 2\pi\right]\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(int\right)$. Atunci $\left\{e_n : n \in \mathbb{Z}\right\}$ este o bază pentru $L^2_{\mathbb{C}}\left(\left[0, 2\pi\right]\right)$.

2) Fie $\mathbb{K}^m$, $e_k = \left(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0\right)$, unde 1 este pe locul k, pentru $k = 1, 2, \cdots, m$. Atunci $\left\{e_1, e_2, \cdots, e_m\right\}$ bază a lui $\mathbb{K}^m$.

Teorema 5. *Dacă E este o mulțime ortonormată a unui spațiul Hilbert H şi $x \in H$, atunci mulțimea $\left\{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\right\}$ este cel mult numărabilă.*

Demonstrație. Fie mulțimea $E_n = \{e \in E : |\langle x, e\rangle| \geq 1/n\}$, pentru $n = 1, 2, 3, \cdots$. Din inegalitatea lui Bessel rezultă, rezultă că mulțimea E_n este finită. Dar $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\}$. □

Corolar. *Dacă E este o mulțime ortonormată a unui spațiul Hilbert H și $x \in H$, atunci* $\sum_{e \in E} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Observație. Ținând cont că mulțimea termenilor diferiți de zero ai acestei sume este cel mult numărabilă, inegalitatea de mai sus este tocmai inegalitatea lui Bessel.

Teorema 6. *Fie H un spațiu Hilbert și $(e_n)_n$ un șir ortonormat de elemente din H. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) $(e_n)_n$ *este o bază ortonormată a lui* H;

ii) dacă $x \in H$ *și* $\langle x, e_n\rangle = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, *atunci* $x = 0$;

iii) $\overline{Sp((e_n)_n)} = H$;

iv) dacă $x \in H$, *atunci* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$;

v) dacă $x, y \in H$, *atunci* $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \cdot \overline{\langle y, e_n\rangle}$ (*Egalitatea lui Parseval*);

vi) dacă $x \in H$, *atunci* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.
(*Egalitatea lui Bessel*).

Demonstrație. $(i) \Rightarrow (ii)$. Dacă (*ii*) este falsă, atunci mulțimea $\{e_n : n = 1, 2, 3, \cdots\} \cup \{x/\|x\|\}$ este ortonormată, ceea ce contrazice (*i*).

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Rezultă din echivalența $\overline{\operatorname{Sp} A} = H \Leftrightarrow A^{\perp} = \{0\}$

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Avem $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ şi $\langle x - y, e_n \rangle = 0$, pentru $n = 1, 2, 3, \cdots$. Astfel, din (*ii*) rezultă că $x = y$.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Fie $s_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ şi $t_n = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle e_i$. Atunci

$$\langle s_n, t_n \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot \overline{\langle y, e_j \rangle} \cdot \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot \overline{\langle y, e_i \rangle}.$$

Folosind proprietatea de continuitate a produsului scalar, rezultă că $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \cdot \overline{\langle y, e_i \rangle}$.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Punem $y = x$ în (*v*) şi rezultă (*vi*).

$(vi) \Rightarrow (i)$. Dacă $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ nu este bază, atunci există un element $z \in H$ astfel încât $\|z\| = 1$ şi $\langle z, e_n \rangle = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Atunci $0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n \rangle|^2$, contradicție cu (*vi*). □

Scrierea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ se numeşte *dezvoltarea Fourier* a elementului x în raport cu baza ortonormată $(e_n)_n$, iar $\varphi_n(x) = \langle x, e_n \rangle$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ se numesc *coeficienții Fourier* ai elementului x în raport cu baza ortonormată $(e_n)_n$.

Formă generală a teoremei de mai sus este următoarea:

Fie $B = \{e_i\}_{i \in I}$ *o mulțime ortonormată dintr-un spațiu Hilbert* H. *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) B *este o bază ortonormată pentru* H;

ii) dacă $x \perp B$, *atunci* $x = 0$;

iii) $\overline{\operatorname{Sp} B} = H$;

iv) dacă $x \in H$ *, atunci* $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ *;*

(*Dezvoltarea Fourier în raport cu baza* B)*;*

v) dacă $x, y \in H$ *, atunci* $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \cdot \langle e_i, y \rangle$ *;*

(*Egalitatea lui Parseval*)

vi) dacă $x \in H$ *, atunci* $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$

(*Egalitatea lui Bessel*). ■

Teorema 7. *În orice spaţiu Hilbert* <u>*separabil*</u> *există o bază ortonormată cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. Afirmaţia este evidentă dacă dimensiunea spaţiului este finită. Fie apoi H un spaţiu Hilbert de dimensiune infinită, în care mulţimea $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ este densă. (Putem presupune că $a_n \neq 0$, pentru oricare n). Fie B_n o bază algebrică în $\mathrm{Sp}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, construcţia făcându-se astfel încât $B_n \subset B_{n+1}$. Atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ este numărabilă şi este o bază algebrică în $\mathrm{Sp}\,A$. Cu procedeul Gram-Schmidt construim o mulţime ortogonală numărabilă E. Dacă $x \perp E$, atunci $x \perp A$ şi deci $x = 0$, ceea ce arată că E este o bază ortogonală. □

Teorema 8. *Orice spaţiu Hilbert separabil infinit-dimensional* H *este izomorf cu spaţiul* ℓ^2.

Demonstraţie. Fie H un spaţiu Hilbert separabil infinit-dimensional are o bază ortonormată numărabilă $(e_n)_n$, conform teoremei precedente. Fie $x \in H$. Atunci $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, unde $\varphi_n(x) = \langle x, e_n \rangle$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ sunt coeficienţii Fourier.

Dacă notăm $a = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ şi observăm că $\|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2 = \|x\|^2$, atunci $a \in \ell^2$.

Definim $h : H \to \ell^2$ prin $h(x) = a$ şi verificăm că h este izomorfism de la H pe ℓ^2. Deoarece avem:

$$\varphi_n(x+y) = \langle x+y, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle + \langle y, e_n\rangle = \varphi_n(x) + \varphi_n(y),$$

$$\varphi_n(\lambda x) = \langle \lambda x, e_n\rangle = \lambda\langle x, e_n\rangle = \lambda\varphi_n(x),$$

rezultă că $h(x+y) = h(x) + h(y)$ şi $h(\lambda x) = \lambda h(x)$, deci h este liniară.

Fie $a = (\alpha_n)_n$ un element oarecare din ℓ^2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ fiind convergentă, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ este convergentă. Dacă notăm $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, atunci $\alpha_n = \varphi_n(x)$, deci $a = h(x)$.

Fie $x, y \in H$. Atunci $\|x - y\| = \|h(x-y)\| = \|h(x) - h(y)\|$, deoarece $\|h(x)\| = \|x\|$. Rezultă deci că $x \neq y \Rightarrow h(x) \neq h(y)$.

În concluzie, aplicația $h : H \to \ell^2$ este o bijecție, care păstrează norma, de la spațiului H pe spațiul ℓ^2. □

Fie *H* un spațiu Hilbert, *A* o submulțime a lui *H* şi $x \in H$. Atunci există un element unic $x_0 \in A$ cu proprietatea că $d(x, x_0) = d(x, A)$. (Reamintim că $d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ este distanța dintre x şi x_0, iar $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$ este distanța de la elementul *x* la mulțimea *A*). Elementul x_0 este numit *element de cea mai bună aproximare* în *A* pentru x.

Acest rezultat este dat de teorema următoare.

Teorema 9. *Dacă A este o submulțime convexă și închisă a unui spațiu Hilbert H, atunci pentru oricare $x \in H$, există un element unic $x_0 \in A$ astfel încât $\|x - x_0\| \leq \|x - a\|$ oricare ar fi $a \in A$.*

Demonstrație. Fie $x \in H$. Fie $(y_n)_n$ un şir din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \delta$, unde $\delta = \operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$.

Vom arăta, mai întâi, că $(y_n)_n$ este şir Cauchy, deci convergent la un element $y_0 \in A$ cu proprietatea $\|x - y_0\| = \delta$. (Această egalitate determină $y_0 \in A$ în mod unic).

Din legea paralelogramului avem:

$$2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 = \|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 + \|(y_m - x) - (x - y_n)\|^2,$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|(y_m + y_n) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\left\|\tfrac{1}{2}(y_m + y_n) - x\right\|^2.\end{aligned}$$

Deoarece mulțimea A este convexă, rezultă că $\frac{1}{2}(y_m + y_n) = \frac{1}{2}y_m + \frac{1}{2}y_n \in A$ şi deci $\left\|\frac{1}{2}(y_m + y_n) - x\right\| \geq \delta$.

Astfel, rezultă că:

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\delta^2.$$

Trecând formal la limită obținem $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|y_m - y_n\|^2 = 0$, adică şirul $(y_n)_n$ este şir Cauchy şi deci convergent.

Mulțimea A fiind închisă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \in A$.

Din $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x) = y_0 - x$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n - x\| = \|y_0 - x\|$, de unde rezultă că $\|y_0 - x\| = \delta$.

Arătăm unicitatea elementului $y_0 \in A$, cu proprietatea $\|y_0 - x\| = \delta$. Fie $z_0 \in A$ cu proprietatea $\|z_0 - x\| = \delta$. Din convexitatea mulțimii A, rezultă că $\frac{1}{2}(y_0 + z_0) \in A$. Avem:

$$\begin{aligned}\|y_0 - z_0\|^2 &= 2\|y_0 - x\|^2 + 2\|x - z_0\|^2 - \|(y_0 + z_0) - 2x\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\tfrac{1}{2}(y_0 + z_0) - x\right\|^2 \\ &\le 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.\end{aligned}$$

Deci $y_0 = z_0$. □

Corolar. *Dacă A este o submulțime convexă şi închisă a unui spațiu Hilbert H, atunci există un element unic $x_0 \in A$ de normă minimă* (*adică, $\|x_0\| \le \|a\|$ pentru oricare $a \in A$*).

Teorema 10. *Dacă X este un subspațiu liniar închis al unui spațiu Hilbert H, atunci $H = X \oplus X^{\perp}$.*

Demonstrație. Fie $x \in H$. Vom arăta că există o descompunere unică $x = x' + x''$, cu $x' \in X$ şi $x'' \in X^{\perp}$.

Întrucât X este mulțime convexă şi închisă, există, prin teorema precedentă, un element $x' \in X$ astfel încât $\|x - x'\| \le \|x - a\|$, oricare ar fi $a \in X$.

Definim $x'' = x - x'$.

Va fi suficient să arătăm că $x'' \perp X$. Dat $a \in X$, oarecare, să arătăm că $\langle x'', a\rangle = 0$. Presupunem, fără a micşora generalitatea, că $\|a\| = 1$. Pentru oricare scalar λ, avem:

$$\begin{aligned}\|x''-\lambda a\|^2 &= \langle x'',x''\rangle-\langle x'',\lambda a\rangle-\langle \lambda a,x''\rangle+\langle \lambda a,\lambda a\rangle\\ &=\|x''\|^2-\overline{\lambda}\langle x'',a\rangle-\lambda\overline{\langle x'',a\rangle}+\lambda\overline{\lambda}\\ &=\|x''\|^2-\langle x'',a\rangle\cdot\overline{\langle x'',a\rangle}+\langle x'',a\rangle\cdot\overline{\langle x'',a\rangle}-\\ &\quad-\overline{\lambda}\langle x'',a\rangle-\lambda\overline{\langle x'',a\rangle}+\lambda\overline{\lambda}\\ &=\|x''\|^2-|\langle x'',a\rangle|^2+\left[\langle x'',a\rangle-\lambda\right]\cdot\overline{\left[\langle x'',a\rangle-\lambda\right]}\\ &=\|x''\|^2-|\langle x'',a\rangle|^2+|\langle x'',a\rangle-\lambda|^2.\end{aligned}$$

Deci, $\|x''-\lambda a\|^2=\|x''\|^2-|\langle x'',a\rangle|^2+|\langle x'',a\rangle-\lambda|^2$.

Dacă $\lambda_0=\langle x'',a\rangle$, avem $\|x''-\lambda_0 a\|^2=\|x''\|^2-|\langle x'',a\rangle|^2$. Din $x''-\lambda_0 a=(x-x')-\lambda_0 a=x-(x'+\lambda_0 a)$ şi $x'+\lambda_0 a\in X$, rezultă că $\|x-x'\|\le\|x-(x+\lambda_0 a)\|$, adică $\|x''\|\le\|x-(x+\lambda_0 a)\|$. Astfel, avem:

$$\|x''\|^2\le\left\|x-(x+\lambda_0 a)\right\|^2=\|x''\|^2-|\langle x'',a\rangle|^2\le\|x''\|^2,$$

de unde rezultă că $\langle x'',a\rangle=0$.

Unicitatea descompunerii rezultă în felul următor.

Fie $x=x'+x''$ şi $x=x_1+x_2$, cu $x',x_1\in X$, $x'',x \in X^{\perp}$, atunci $x'-x_1=x''-x_2\in X\bigcap X^{\perp}=\{0\}$. □

Definiție. Fie X un subspațiu liniar închis al unui spațiu Hilbert H.

Subspațiul liniar închis $X^{\perp}$ se numeşte *complementul ortogonal* al lui X.

Fie $x\in H$ şi descompunerea sa ortogonală $x=x'+x''$, cu $x'\in X$ şi $x''\in X^{\perp}$. Elementul $x'\in X$ se numeşte *proiecția ortogonală* a lui x pe X; elementul $x''\in X^{\perp}$ se numeşte *proiecția ortogonală* a lui x pe $X^{\perp}$.

Aplicația $P : H \to X$, definită prin $P(x) = x'$, se numeşte *proiector* pe subspațiul X.

Aplicația $Q : H \to X^{\perp}$, definită prin $Q(x) = x''$, se numeşte *proiector* pe subspațiul $X^{\perp}$.

Propoziție. *Proiectorii $P : H \to X$ şi $Q : H \to X^{\perp}$ definiți mai sus au următoarele proprietăți:*

1) $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$ $(x, y \in H)$;

2) $P(\lambda x + y) = P(\lambda x) + P(y)$ $(\lambda \in \mathbb{K},\ x, y \in H)$;

3) $P(P(x)) = P(x)$ $(x \in H)$;

4) $\|P(x)\| \le \|x\|$ $(x \in H)$;

5) $\operatorname{Im} P \equiv \{P(x) : x \in H\} = X$;

6) $\operatorname{Ker} P \equiv \{x \in H : P(x) = 0\} = X^{\perp}$;

7) $P(x) + Q(x) = x$ $(x \in H)$;

8) $P(Q(x)) = Q(P(x)) = 0$ $(x \in H)$.

Demonstrație. Verificăm proprietatea 4); celelalte se verifică uşor. Fie $x \in H$, $x = x' + x''$, cu $x' \in X$ şi $x'' \in X^{\perp}$. Atunci $\|x\|^2 = \|x' + x''\|^2 = \|x'\|^2 + \|x''\|^2 \ge \|x'\|^2 = \|P(x)\|^2$. □

6.3. Reprezentarea funcționalelor liniare şi continue

Observație. *Fie H este un spațiu Hilbert şi $x_0 \in H$ un element fixat. Fie o funcțională $f : H \to \mathbb{K}$ definită prin*

$f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ $(x \in H)$. *Atunci aplicația* f *este o funcțională liniară şi mărginită, cu* $\|f\| = \|x_0\|$.

Justificare. Liniaritatea lui f rezultă din proprietatea de liniaritate a produsului scalar. Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că $|f(x)| = |\langle x, x_0 \rangle| \le \|x\| \cdot \|x_0\|$, pentru oricare $x \in H$, adică f este mărginită, deci continuă. Următoarele relații $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |f(x)| \le \|x_0\|$ şi $\|f\| \cdot \|x_0\| \ge |f(x_0)| = |\langle x_0, x_0 \rangle| = \|x_0\|^2$, implică $\|f\| = \|x_0\|$. □

Următoarea teoremă, cunoscută ca *teorema lui Riesz-Fréchet de reprezentare a funcționalelor liniare şi continue pe spații Hilbert*, este reciproca observației de mai sus.

Teorema 11 (Teorema Riesz-Fréchet). *Dacă* $f : H \to \mathbb{K}$ *este o funcțională liniară şi continuă, atunci există un element unic* $x_0 \in H$ *astfel încât* $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ $(x \in H)$.

Demonstrație. Fie $\operatorname{Ker} f \equiv \{x \in H : f(x) = 0\}$. Atunci $\operatorname{Ker} f$ este un subspațiu liniar închis al lui H. Dacă $\operatorname{Ker} f = H$, atunci $f = 0$ şi luăm $x_0 = 0$.

Dacă $f \ne 0$, atunci $\operatorname{Ker} f \ne H$, cu complementul ortogonal $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} \ne \{0\}$. Astfel există un element $y_0 \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, $y_0 \ne 0$ şi deci astfel încât $f(y_0) \ne 0$.

Fie $x \in H$ oarecare. Atunci $x - \dfrac{f(x)}{f(y_0)} \cdot y_0 \in \operatorname{Ker} f$.

Avem:

$$0 = \langle x - \frac{f(x)}{f(y_0)} \cdot y_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle - \frac{f(x)}{f(y_0)} \langle y_0, y_0 \rangle,$$

de unde rezultă că:

$$f(x) = \frac{f(y_0)}{\langle y_0, y_0 \rangle} \cdot \langle x, y_0 \rangle = \langle x, \frac{\overline{f(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} \cdot y_0 \rangle.$$

Cu $x_0 = \frac{\overline{f(y_0)}}{\langle y_0, y_0 \rangle} \cdot y_0$ avem formula $f(x) = \langle x, x_0 \rangle \ (x \in H)$.

Unicitatea se demonstrează în felul următor. Dacă există $x_0, x_1 \in H$ astfel încât $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ și $f(x) = \langle x, x_1 \rangle$ pentru oricare $x \in H$, atunci $0 = \langle x, x_0 \rangle - \langle x, x_1 \rangle = \langle x, x_0 - x_1 \rangle$, de unde rezultă că $x_0 = x_1$.

Conform observației precedente avem și $\|f\| = \|x_0\|$. □

O consecință importantă a teoremei de reprezentare a funcționalelor liniare și continue este teorema următoare.

Teorema 12. *Fie H este un spațiu Hilbert. Atunci H este izomorf ca spațiu normat cu dualul său H^*.*

Demonstrație. Conform teoremei lui Riesz-Fréchet, fiecărei funcționale liniare și continue $f : H \to \mathbb{K}$ îi corespunde un element unic $y_f \in H$ astfel încât $f(x) = \langle x, y_f \rangle \quad (x \in H)$.

Reciproc, fiecărui element $y \in H$ îi corespunde funcționala liniară și continuă $f : H \to \mathbb{K}$, definită de produsul scalar $f(x) = \langle x, y \rangle \quad (x \in H)$. Astfel, aplicația $y \mapsto f$ este o bijecție între spațiul Hilbert H și dualul său H^*.

Deoarece avem $\|f\| = \|y\|$, această bijecție este și izometrie, deci este homeomorfism. Se scrie $H \cong H^*$. □

Propoziție. *Un operator liniar $T : H \to H$ este continuu dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel încât:*

$$\left|\langle x, T(y)\rangle\right| \le M\|x\|\|y\| \quad (x, y \in H).$$

În plus,

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\left\{\left|\langle x, T(y)\rangle\right| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1 \ (x, y \in H)\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\langle x, T(y)\rangle\right| : \|x\| = 1, \|y\| = 1 \ (x, y \in H)\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\left|\langle x, T(y)\rangle\right|}{\|x\|\|y\|} : \|x\| \ne 0, \|y\| \ne 0\right\} \ (x, y \in H) \\
&= \inf\left\{M > 0 : \left|\langle x, T(y)\rangle\right| \le M\|x\|\|y\| \ (x, y \in H)\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstrație. Dacă T este continuu, atunci $\left|\langle x, T(y)\rangle\right| \le \|x\|\|T(y)\| \le \|T\|\|x\|\|y\| \quad (x, y \in H)$.

Reciproc, dacă există $M > 0$ astfel încât $\left|\langle x, T(y)\rangle\right| \le M\|x\|\|y\| \quad (x, y \in H)$, atunci, luând $x = T(y)$, rezultă că $\|T(y)\|^2 = \langle T(y), T(y)\rangle \le M\|T(y)\|\|y\| \quad (y \in H)$.

Deci $\|T(y)\| \le M\|y\| \quad (y \in H)$. □

Observație. Întrucât $\left|\langle y, T(x)\rangle\right| \le \left|\overline{\langle T(x), y\rangle}\right| = \left|\langle T(x), y\rangle\right|$, rezultă că T este continuu dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel încât $\left|\langle T(x), y\rangle\right| \le M\|x\|\|y\| \quad (x, y \in H)$.

Teorema 13 (Teorema Hellinger-Toeplitz). *Dacă* $T: H \to H$ *este un operator liniar cu proprietatea* $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \quad (x, y \in H)$, *atunci* T *este continuu.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de elemente din H, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = y$.

Pentru $z \in H$, avem:

$$\begin{aligned}\langle z, y\rangle &= \langle z, \lim_{n\to\infty} T(x_n)\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle z, T(x_n)\rangle\ , \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle T(z), x_n\rangle = \langle T(z), \lim_{n\to\infty} x_n\rangle \\ &= \langle T(z), x\rangle = \langle z, T(x)\rangle.\end{aligned}$$

Deci $y = T(x)$. Operatorul T este închis, iar din teorema graficului închis rezultă că T este continuu. □

6.4. Adjunctul unui operator liniar şi continuu

O consecință importantă a teoremei lui Riesz-Fréchet de reprezentare a funcționalelor liniare şi continue este existența adjunctului unui operator liniar şi continuu pe un spațiu Hilbert.

Teorema 14. *Dacă* H *este un spațiu Hilbert, iar* $U: H \to H$ *este un operator liniar şi continuu, atunci există un operator liniar şi continuu, unic* $U^*: H \to H$ *cu proprietatea:*

$$\langle U(x), y\rangle = \langle x, U^*(y)\rangle \ \ (x, y \in H).$$

Demonstrație. 1. *Fie* $y_0 \in H$ *, fixat. Definim* $f : H \to \mathbb{K}$ *prin* $f(x) = \langle U(x), y_0 \rangle$ $(x \in H)$. *Atunci* f *este o funcțională liniară şi continuă, cu propritatea* $\|f\| \leq \|U\| \cdot \|y_0\|$.

Aplicația f este liniară. Fie $x, y \in H$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \langle U(\lambda x + y), x_0 \rangle \\ &= \langle \lambda U(x) + U(y), y_0 \rangle \\ &= \langle \lambda U(x), x_0 \rangle + \langle U(y), y_0 \rangle \\ &= \lambda \langle U(x), x_0 \rangle + \langle U(y), y_0 \rangle \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Aplicația f este mărginită:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle U(x), y_0 \rangle| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\| \cdot \|y_0\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|U\| \cdot \|x\| \cdot \|y_0\| \\ &= \|U\| \cdot \|y_0\|. \end{aligned}$$

Deci, $\|f\| \leq \|U\| \cdot \|y_0\|$.

2. *Există un element unic* $y^* \in H$*, astfel încât* $f(x) = \langle U(x), y_0 \rangle = \langle x, y^* \rangle$ $(x \in H)$ *şi* $\|f\| = \|y^*\|$.

Deoarece funcționala *f* este liniară şi continuă, conform teoremei lui Riesz-Fréchet, rezultă că există un element unic $y^* \in H$, astfel încât:

$$f(x) = \langle U(x), y_0 \rangle = \langle x, y^* \rangle \ (x \in H) \text{ şi } \|f\| = \|y^*\|.$$

3. *Aplicația* $U^* : H \to H$*, definită prin* $U^*(y_0) = y^*$ $(y_0 \in H)$ *este un operator liniar şi continuu.*

Aplicația U^* este bine definită şi are proprietatea $\langle U(x), y \rangle = \langle x, U^*(y) \rangle$ $(x, y \in H)$.

Fie $x, y_1, y_2 \in H$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aplicația U^* este liniară:

$$\begin{aligned} \langle x, U^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle &= \langle U(x), \lambda y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle U(x), \lambda y_1\rangle + \langle U(x), y_2\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle U(x), y_1\rangle + \langle U(x), y_2\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle x, U^*(y_1)\rangle + \langle x, U^*(y_2)\rangle \\ &= \langle x, \lambda U^*(y_1)\rangle + \langle x, U^*(y_2)\rangle \\ &= \langle x, \lambda U^*(y_1) + U^*(y_2)\rangle. \end{aligned}$$

Aplicația U^* este mărginită:

$$\|U^*\| = \sup_{\|y_0\|\le 1}\|U^*(y_0)\| = \|y^*\| = \|f\| \le \|U\|\|y_0\| \le \|U\|,$$

adică $\|U^*\| \le \|U\|$.

4. *Operatorul liniar şi continuu* $U^* : H \to H$, *cu proprietatea* $\langle U(x), y\rangle = \langle x, U^*(y)\rangle$ $(x, y \in H)$ *este unic.*

Fie $V : H \to H$ un operator liniar şi continuu, astfel încât $\langle U(x), y\rangle = \langle x, V(y)\rangle$ $(x, y \in H)$. Atunci:

$$\langle x, U^*(y)\rangle = \langle x, V(y)\rangle \ (x, y \in H),$$

adică $V = U^*$. □

Definiție. Operatorul liniar şi continuu, unic $T^* : H \to H$ cu proprietatea $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ $(x, y \in H)$ se numeşte *adjunctul operatorului* liniar şi continuu $T : H \to H$.

Exemple.

1). Fie *H* un spațiu Hilbert separabil de dimensiune infinită şi $(e_n)_n$ o bază ortonormată pentru *H*.

Atunci, pentru fiecare $x \in H$, există o reprezentate unică $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, cu $\lambda_n = \langle x, e_n \rangle$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

Fie $(\mu_n)_n$ un şir mărginit de numere complexe şi $M = \sup\{|\mu_n|, n = 1, 2, 3, \cdots\}$.

Întrucît $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \mu_n|^2 \le M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = M \|x\|^2$, putem defini operatorul $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n e_n$, $T : H \to H$. Se verifică imediat liniaritatea lui *T*. Din $\|T(x)\|^2 \le M^2 \|x\|^2$, rezultă că *T* este continuu şi $\|T\| \le M$. De asemenea, avem:

$$T(e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle e_k, e_n \rangle e_n = \mu_k e_k,$$

deci $T(e_k) = \mu_k e_k$, $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Întrucât $\|e_k\| = 1$, avem $\|T\| \ge \|T(e_n)\| = |\mu_n| \|e_n\| = |\mu_n|$, pentru $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Prin urmare, $\|T\| \ge M$. Astfel, am demonstrat că $\|T\| = M$.

Adjunctul T^* al operatorului *T* se defineşte prin $T^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\mu_n} \cdot e_n$. Atunci $T(e_k) = \overline{\mu_k} \cdot e_k$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. □

2). Fie $U : \ell^2 \to \ell^2$, $U(x) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$, unde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. Atunci $U^* = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. □

Propoziție. *Fie H un spațiu Hilbert. Fie $S : H \to H$ şi $T : H \to H$ operatori liniari şi continui. Atunci:*

i) $(S + T)^* = S^* + T^*$;

ii) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^* \ (\lambda \in \mathbb{K})$;

iii) $(T^*)^* = T$;

iv) $(ST)^* = T^* S^*$;

v) $\|T^*\| = \|T\|$;

vi) $\|T^* T\| = \|T\|^2$;

vii) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, *dacă există* T^{-1} ;

viii) $\mathrm{Ker}\, T^* = (T(H))^{\perp}$

ix) $T^* T = 0 \ \Leftrightarrow \ T = 0$.

Demonstrație. Proprietățile (i) şi (ii) se verifică uşor.

(iii): Notăm $T^{**} = (T^*)^*$. Atunci, pentru oricare $x, y \in H$, avem:

$$\begin{aligned}\langle x, T^{**}(y)\rangle &= \langle x, (T^*)^*(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle \\ &= \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \overline{\langle T(y), x\rangle} \\ &= \langle x, T(y)\rangle,\end{aligned}$$

adică $T^{**} = T$.

(iv): Pentru oricare $x, y \in H$, avem următoarele egalități:

$$\begin{aligned}\langle x, (ST)^*(y)\rangle &= \langle (ST)(x), y\rangle = \langle S(T(x)), y\rangle \\ &= \langle T(x), S^*(y)\rangle = \langle x, T^*(S^*(y))\rangle \\ &= \langle x, (T^* S^*)(y)\rangle,\end{aligned}$$

adică $(ST)^* = T^* S^*$.

(v): Avem $\|T\| = \|T^{**}\| = \left\|(T^*)^*\right\| \le \|T^*\|$, adică $\|T\| \le \|T^*\|$ şi $\|T^*\| \le \|T\|$, deci $\|T^*\| = \|T\|$.

(vi): $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*T(x), x\rangle \le \|T^*T\|\|x\|^2$, pentru oricare $x \in H$. De aici şi din (v), rezultă:

$$\|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2,$$

deci $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

(vii): Avem următoarele implicații:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I \Leftrightarrow \left(TT^{-1}\right)^* = \left(T^{-1}T\right)^* = I^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(T^{-1}\right)^* T^* = T^*\left(T^{-1}\right)^* = I \Rightarrow \left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*.$$

($viii$): Din $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ $(x, y \in H)$ rezultă imediat că:

$$y \in \operatorname{Ker} T^* \Rightarrow y \in T(H)^{\perp} \text{ şi } y \perp T(H) \Rightarrow T^*(y) \perp H,$$

adică $T^*(y) = 0$. Deci $\operatorname{Ker} T^* = \left(T(H)\right)^{\perp}$.

(ix): Rezultă din (vi). □

Observație. O formulare echivalentă a egalității $\operatorname{Ker} T^* = \left(T(H)\right)^{\perp}$ este $H = \operatorname{Ker} T^* \oplus T(H)$.

Operatori autoadjuncți

Definiție. Un operator liniar şi continuu $T : H \to H$ se numeşte *operator autoadjunct* sau *hermitian* dacă şi numai dacă $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ $(x, y \in H)$, adică $T^* = T$.

Exemplu. Un proiector este un operator autoadjunct.

Teorema 15. *Fie H un spațiu Hilbert şi $T : H \to H$ un operator liniar şi continuu. Atunci următoarele condiții sunt echivalente:*

i) $T^* = T$ *;*

ii) $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \quad (x, y \in H)$*;*

iii) $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle \quad (x \in H)$*;*

iv) $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R} \quad (x \in H)$.

Demonstrație. Demonstrăm:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Pentru fiecare $x, y \in H$ avem egalitățile: $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, T(y)\rangle$;

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Evident, pentru $y = x$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: $\overline{\langle Tx, (x)\rangle} = \langle x, T(x)\rangle = \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, $(x \in H)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Presupunem că $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R} \ (x \in H)$.

Dacă $\alpha \in \mathbb{K}$ şi $x, y \in H$, atunci:

$$\begin{aligned}\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle &= \langle T(x), x\rangle + \overline{\alpha}\langle T(x), y\rangle + \\ &+\alpha\langle T(y), x\rangle + |\alpha|^2 \langle T(y), y\rangle.\end{aligned}$$

Astfel, membrul drept al egalității fiind un număr real, rezultă că:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}\langle T(x), y\rangle + \alpha\langle T(y), x\rangle &= \overline{\overline{\alpha}\langle T(x), y\rangle + \alpha\langle T(y), x\rangle} \\ &= \alpha\langle y, T(x)\rangle + \overline{\alpha}\langle x, T(y)\rangle \\ &= \alpha\langle T^*(y), x\rangle + \overline{\alpha}\langle T^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = i$, avem următoarele egalități:

$$\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle = \langle T^*(y), x\rangle + \langle T^*(x), y\rangle,$$

$$-i\langle T(x), y\rangle + i\langle T(y), x\rangle = i\langle T^*(y), x\rangle - i\langle T^*(x), y\rangle .$$

Înmulțim a doua egalitate cu i şi obținem:

$$\langle T(x), y\rangle - \langle T(y), x\rangle = -\langle T^*(y), x\rangle + \langle T^*(x), y\rangle ,$$

pe care o adunăm cu prima egalitate şi avem:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle T^*(x), y\rangle,$$

adică $T = T^*$, care este condiția (i). □

Din proprietățile operatorilor adjuncți, rezultă următoarele proprietăți ale operatorilor autoadjuncți:

1) Dacă S şi T sunt autoadjuncți şi $\alpha \in \mathbb{R}$, *atunci* $\alpha S + T$ *este autoadjunct;*

2) Dacă T este un operator liniar şi continuu, atunci $T + T^*$ *şi* T^*T *sunt autoadjuncți;*

3) Dacă S şi T sunt autoadjuncți, atunci ST este autoadjunct dacă şi numai dacă $ST = TS$.

Teorema 16. *Dacă T este un operator autoadjunct, atunci*

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\langle T(x), x\rangle\right| : \|x\| = 1\right\}.$$

Demonstrație. Fie T un operator autoadjunct. Notăm $M = \sup\left\{\left|\langle T(x), x\rangle\right| : \|x\| = 1\right\}$. Observăm că dacă $\|x\| = 1$, atunci $\left|\langle T(x), x\rangle\right| \le \|T\|$, deci $M \le \|T\|$.

Pe de altă parte, dacă $\|x\| = \|y\| = 1$, atunci:

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle T(x), x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), y\rangle$$
$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle T(x), x\rangle - 2\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), y\rangle.$$

Prin scăderea celor două egalități, obținem:

$$4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle.$$

Deoarece $\left|\langle T(z), z\rangle\right| \le M\|z\|^2$, pentru oricare z, folosind legea paralelogramului, rezultă că:

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle &\le M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ &= 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\ &= 4M. \end{aligned}$$

Deci, $\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle \le M$.

$$\begin{aligned} \left|\langle T(x), y\rangle\right| &= e^{-i\theta}\langle T(x), y\rangle = \langle T\left(e^{-i\theta}x\right), y\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle T\left(e^{-i\theta}x\right), y\rangle \le M. \end{aligned}$$

Deci, $\left|\langle T(x), y\rangle\right| \le M$.

Luând supremum după *y*, pentru *x* fixat, avem $\|T(x)\| \le M$. Astfel $\|T\| \le M$.

În concluzie, avem $\|T\| = M$. □

Observație. Dacă $T : H \to H$ este autoadjunct şi dacă $m = \inf\left\{\left|\langle T(x), x\rangle\right| : \|x\| = 1\right\}$ şi $M = \sup\left\{\left|\langle T(x), x\rangle\right| : \|x\| = 1\right\}$, atunci $m\|x\|^2 \le \langle T(x), x\rangle \le M\|x\|^2 \quad (x \in H)$.

Astfel, $\|T\| = \max\left(|m|, |M|\right)$.

Forma algebrică a unui număr complex $\lambda = \alpha + i\beta$, unde α şi β sunt numere reale, are o generalizare pentru operatori.

Teorema 17 (Forma carteziană a unui operator). *Dacă T este un operator liniar şi continuu pe un spațiu Hilbert complex H, atunci există A şi B operatori autoadjuncți, unici astfel încât* $T = A + iB$.

Demonstrație. Definim operatorii A şi B prin formulele: $A = \frac{1}{2}\left(T + T^*\right)$ şi $B = \frac{1}{2i}\left(T - T^*\right)$.

Se verifică imediat că A şi B sunt autoadjuncți şi că $T = A + iB$. Dacă $T = C + iD$, cu $C = C^*$ şi $D = D^*$, atunci avem $T^* = C^* - iD^* = C - iD$ şi deci $\frac{1}{2}\left(T + T^*\right) = C$, $\frac{1}{2i}\left(T - T^*\right) = D$. Prin urmare, $C = A$ şi $D = B$. □

Operatori normali

Definiție. Un operator liniar şi continuu $T : H \to H$ se numeşte *normal* dacă $T^*T = TT^*$.

Observații.

1) Fiecare operator autoadjunct este normal.

2) Un operator T este normal dacă şi numai dacă adjunctul său T^* este normal.

Propoziție. *Un operator liniar şi continuu* $T : H \to H$ *este normal dacă şi numai dacă* $\left\|T^*(x)\right\| = \left\|T(x)\right\| \quad (x \in H)$.

Demostrație. Dacă T este normal, atunci, pentru fiecare $x \in H$, avem:

$$\begin{aligned}\left\|T^*(x)\right\|^2 &= \langle T^*(x), T^*(x)\rangle \\ &= \langle TT^*(x), x\rangle \\ &= \langle T^*T(x), x\rangle \\ &= \langle T(x), T(x)\rangle \\ &= \left\|T(x)\right\|^2,\end{aligned}$$

de unde rezultă că $\|T^*(x)\| = \|T(x)\| \quad (x \in H)$.

Reciproc, dacă $\|T^*(x)\| = \|T(x)\|$, pentru oricare $x \in H$, atunci avem:

$$\begin{aligned}\langle T^*T(x), x\rangle &= \langle T(x), T(x)\rangle \\ &= \|T(x)\|^2 \\ &= \|T^*(x)\|^2 \\ &= \langle T^*(x), T^*(x)\rangle \\ &= \langle TT^*(x), x\rangle,\end{aligned}$$

de unde rezultă că $T^*T = TT^*$. □

Teorema 18. *Fie T un operator liniar și continuu pe un spațiu Hilbert complex H și fie $T = A + iB$ forma sa carteziană. Atunci, T este normal dacă și numai dacă $AB = BA$.*

Demonstrație. Dacă $AB = BA$, atunci:

$$\begin{aligned}T^*T &= (A - iB)(A + iB) \\ &= A^2 + B^2 \\ &= (A + iB)(A - iB) = TT^*,\end{aligned}$$

deci T este normal.

Reciproc, dacă T este normal, atunci:

$$\begin{aligned}AB &= \tfrac{1}{2}\left(T + T^*\right)\tfrac{1}{2i}\left(T - T^*\right) \\ &= \tfrac{1}{4i}\left(T^2 - T^{*2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2i}\left(T - T^*\right)\tfrac{1}{2}\left(T + T^*\right) = BA,\end{aligned}$$

deci $AB = BA$. □

6.5. Spectrul unui operator autoadjunct

Fie H un spațiu Hilbert.

Teorema 19. *Spectrul unui operator autoadjunct este inclus în* $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie deci H un spațiu Hilbert complex şi U un operator autoadjunct. Vom arăta că dacă $\lambda \notin \mathbb{R}$, atunci λ este un număr regulat pentru U. Dacă $\lambda \notin \mathbb{R}$, atunci $U - \lambda I$ este injectiv, căci dacă ar exista $x \in H$, $x \neq 0$, astfel încât $(U - \lambda I)(x) = 0$, atunci $U(x) = \lambda x$, de unde $\langle U(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2$. Ar rezulta că $\lambda \in \mathbb{R}$, ceea ce contrazice ipoteza.

Într-o a doua etapă, vom arăta că dacă $U - \lambda I$ este injectiv, atunci:

$$\overline{(U - \lambda I)(H)} = H \tag{6.5.1}$$

Într-adevăr, să presupunem că $\overline{(U - \lambda I)(H)}$ este un subspațiu strict inclus în H. Conform teoremei proiecției pe un subspațiu închis, există $y \in H$, $y \neq 0$, un element ortogonal pe $\overline{(U - \lambda I)(H)}$ şi deci $\langle y, (U - \lambda I)(x)\rangle = 0$, $\forall x \in H$. Atunci $\langle (U - \bar{\lambda} I)(y), x\rangle = 0$, $\forall x \in H$ şi deci $(U - \bar{\lambda} I)(y) = 0$.

Ca mai sus rezultă că $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, adică $\lambda = \bar{\lambda}$.

Atunci $(U - \lambda I)(y) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Are loc deci egalitatea (6.5.1).

Fie apoi $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Scriem:

$$\begin{aligned}\|(U - \lambda I)(x)\|^2 &= \|(U - aI)(x) - ibx\|^2 \\ &= \|(U - aI)(x)\|^2 + |b|^2 \|x\|^2,\end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\left\|\left(U-\lambda I\right)\left(x\right)\right\| \geq |b|\|x\|,\ \forall\, x \in H. \tag{6.5.2}$$

Vom arăta că din (6.5.1) şi (6.5.2) rezultă că $\left(U-\lambda I\right)\left(H\right)=H$. Fie pentru aceasta $z \in H$ şi, conform cu (6.5.1), fie $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ un şir în H astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(U-\lambda I\right)\left(x_n\right)=z$.

Din (6.5.2) rezultă $\left\|\left(U-\lambda I\right)\left(x_n-x_m\right)\right\| \geq |b|\|x_n-x_m\|$.

Şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este atunci fundamental, deci convergent şi fie $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci $\left(U-\lambda I\right)\left(x\right)=z$.

În concluzie, dacă $\lambda \notin \mathbb{R}$, atunci $U-\lambda I$ este o bijecție, iar inversul este continuu conform teoremei aplicației deschise. Deci λ este un număr regulat.

Rămâne că spectrul este inclus în $\mathbb{R}$. □

Teorema 20. *Numărul* λ *este regulat pentru operatorul autoadjunct U dacă şi numai dacă există* $M>0$ *astfel încât:*

$$\left\|\left(U-\lambda I\right)\left(x\right)\right\| \geq M\|x\|, \forall\, x \in H. \tag{6.5.3}$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă λ este un număr regulat pentru *U*, atunci inegalitatea (6.5.3) descrie continuitatea operatorului $\left(U-\lambda I\right)^{-1}$.

Reciproc, dacă are loc (6.5.3) atunci $U-\lambda I$ este injectiv şi ca în teorema precedentă rezultă că este şi surjectiv. □

Corolar. *Dacă U este un operator autoadjunct, atunci numărul* λ *aparține spectrului lui U dacă şi numai dacă există un şir* $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$, $\|x_n\|=1$, $\forall\, n\geq 1$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(U\left(x_n\right)-\lambda x_n\right)=0$.

Demonstrație. Conform teoremei precedente, numărul λ aparține spectrului lui U dacă și numai dacă există z_n, $\left\|(U-\lambda I)(z_n)\right\| < \frac{1}{n}\|z_n\|$. Atunci $z_n \neq 0$ și luăm $x_n = z_n / \|z_n\|$.

Reciproc, dacă $\|x_n\| = 1$ și $\lim\limits_{n \to \infty}\left(U(x_n) - \lambda x_n\right) = 0$, atunci nu poate avea loc (6.5.3) și deci λ aparține spectrului lui U. □

Fie U un operator autoadjunct pe spațiul Hilbert H și fie:

$$m_U = \inf\left\{\left|\langle U(x), x\rangle\right| : \|x\| = 1\right\},$$

$$M_U = \sup\left\{\left|\langle U(x), x\rangle\right| : \|x\| = 1\right\}.$$

Atunci conform teoremei 16 avem:

$$\|U\| = \max\left(|m_U|, |M|_U\right).$$

Teorema 21. *Dacă U este un operator autoadjunct pe spațiul Hilbert H, aunci numerele* m_U, M_U *aparțin spectrului și* $\boldsymbol{S}(U) \subset [m_U, M_U]$.

Demonstrație. Dacă $\lambda \in \boldsymbol{S}(U)$, atunci există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$, $\|x_n\| = 1$, $\forall\, n \geq 1$ și $\lim\limits_{n \to \infty}\left(U(x_n) - \lambda x_n\right) = 0$. Atunci $\lim\limits_{n \to \infty}\langle U(x_n), x_n\rangle = \lambda$ și deci $\lambda \in [m_U, M_U]$.

Pentru a arăta că $M_U \in \boldsymbol{S}(U)$, să presupunem, pentru început, că $\|U\| = M_U$. Dacă, prin absurd, M_U este număr regulat pentru U, atunci există $r > 0$ astfel încât $\left\|(U(x) - M_U x)\right\| \geq r\|x\|$, pentru orice $x \in H$. Atunci $\langle U(x) - M_U x, U(x) - M_U x\rangle \geq r^2 \|x\|^2$, iar pentru $\|x\| = 1$ rezultă:

$$\langle U(x), U(x)\rangle - 2M_U \langle U(x), x\rangle + M_U^2 \geq r^2,$$

de unde $\|U\|^2 + M_U^2 \geq r^2 + 2M_U \|U\|$. Deci $r \leq 0$, ceea ce este o contradicție.

Rămâne că $M_U \in \boldsymbol{S}(U)$.

Pentru cazul general, considerăm operatorul *T*, $T(x) = U(x) - m_U x$. Se verifică direct că $M_T = M_U - m_U$, $m_T = 0$ şi deci ne situăm în etapa precedentă.

Rezultă că există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $\|x_n\| = 1$, $\forall\, n \geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(T(x_n) - M_T x_n\right) = 0$, ceea ce este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(U(x_n) - M_T x_n\right) = 0$. Deci $M_U \in \boldsymbol{S}(U)$.

Înlocuind U cu $-U$, se arată că $m_U \in \boldsymbol{S}(U)$. □

Observație. În particular, teorema precedentă asigură că spectrul unui operator autoadjunct este nevid.

Fie H un spațiu Hilbert şi U un operator liniar continuu autoadjunct. Fie $Y \subset H$ un subspațiu liniar.
Atunci:

$$U(Y) \subset Y \;\Rightarrow\; U\left(Y^{\perp}\right) \subset Y^{\perp}. \qquad (6.5.4)$$

Teorema 22 (Hilbert-Schmidt). *Dacă U este un operator liniar continuu, autoadjunct şi compact pe un spațiu Hilbert H, atunci există în H o bază ortonormată formată din vectori proprii pentru U.*

Demonstrație. Fie A mulțimea numerelor proprii ale lui U şi $\lambda \in A$. Fie E_λ subspațiul propriu corespunzător şi B_λ o bază ortonormată în E_λ.

Fie $E = \bigcup_{\lambda \in A} B_\lambda$ şi $Y = \overline{Sp(E)}$.

Folosind continuitatea lui U şi (6.5.4) avem:

$$
\begin{aligned}
U(E_\lambda) \subset E_\lambda \quad &\Rightarrow U(E) \subset Sp(E) \\
&\Rightarrow U(Sp(E)) \subset Sp(E) \\
&\Rightarrow U(Y) \subset Y \\
&\Rightarrow U(Y^\perp) \subset Y^\perp .
\end{aligned}
$$

Dacă $Y^\perp \neq \{0\}$, atunci restricția U_0 a lui U la $Y^\perp$, $U_0 : Y^\perp \to Y^\perp$ este operator autoadjunct, compact, injectiv (dacă $z \neq 0$, $z \in Y^\perp$ şi $U(z) = 0$, atunci $z \in Y$, deci $z = 0$, ceea ce este o contradicție). Operatorul U_0 este atunci nenul şi ar exista $\alpha \neq 0$ şi $a \in Y^\perp$, $a \neq 0$, $U_0(a) = \alpha a$. Atunci $a \in Y$ şi deci $a = 0$, ceea ce este o contradicție.

Rămâne că $Y^\perp = \{0\}$, de unde $E^\perp = \{0\}$ şi deci E este bază ortonormată. □

6.6. Spectrul adjunctului

Legătura dintre spectrul unui operator şi spectrul adjunctului său este dată de propoziția următoare.

Propoziția. *Dacă H este un spațiu Hilbert complex şi $U : H \to H$ este un operator liniar şi continuu, atunci*

$$\boldsymbol{S}(U^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \boldsymbol{S}(U)\}.$$

Demonstrație. Afirmația rezultă imediat ştiind că dacă V este inversabil, atunci V^* este inversabil şi $\left(V^*\right)^{-1} = \left(V^{-1}\right)^*$. □

Fie U un operator liniar, continuu şi compact pe H. Se ştie că U^* este, de asemenea, operator compact. Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $\lambda \neq 0$, din teorema Riesz-Schauder rezultă că $(U - \lambda I)(H)$ este un subspațiu închis. Atunci:

$$(U - \lambda I)(H)^{\perp\perp} = (U - \lambda I)(H). \tag{6.6.1}$$

Teorema 23. *Fie H un spațiu Hilbert complex şi $U : H \to H$ un operator compact şi $\lambda \neq 0$. Atunci:*

$$(U - \lambda I)(H) = \left(\ker\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)\right)^{\perp}. \tag{6.6.2}$$

Demonstrație. Conform cu (6.6.1) relația (6.6.2) este echivalentă cu:

$$(U - \lambda I)(H)^{\perp} = \left(\ker\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)\right). \tag{6.6.3}$$

Fie $x \in H$. Dacă $y \in (U - \lambda I)(H)^{\perp}$, atunci $\langle y, (U - \lambda I)(x)\rangle = 0$, deci $\langle \left(U^* - \overline{\lambda} I\right)(y), x\rangle = 0$. Prin urmare, avem $\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)(y) = 0$ şi astfel, $y \in \left(\ker\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)\right)$.

Pentru cealaltă incluziune, dacă $y \in \left(\ker\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)\right)$, atunci avem:

$\langle y, (U - \lambda I)(x)\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$, adică $y \in (U - \lambda I)(H)^{\perp}$. □

Observație. Relația $(U - \lambda I)(H)^{\perp} = \left(\ker\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)\right)$ este echivalentă cu $\left(U^* - \overline{\lambda} I\right)(H)^{\perp} = \ker(U - \lambda I)$.

Observație. În ipotezele din teorema precedentă considerăm ecuațiile:

$$(U-\lambda I)(x)=y \tag{6.6.4}$$

$$(U-\lambda I)(x)=0 \tag{6.6.5}$$

Ecuația omogenă (6.6.5) are numai soluția nulă dacă şi numai dacă ecuația neomogenă (6.6.4) are soluție pentru orice $y\in H$ (vezi teorema Riesz- Schauder). Dacă ecuația omogenă (6.6.5) are şi soluții nenule, atunci ecuația neomogenă (6.6.4) are soluție dacă şi numai dacă $y\in\left(\ker\left(U^*-\overline{\lambda}I\right)\right)^{\perp}$. □

6.7. Exemple şi exerciții

1) Fie $p\geq 1$ şi $e_n\in\ell^p$, $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, unde 1 se află pe locul *n*.

a) Să se calculeze $\|e_1+e_2\|_p^2+\|e_1-e_2\|_p^2$ şi $\|e_1\|_p^2+\|e_2\|_p^2$;

b) Să se arate că în spațiul ℓ^p are loc legea paralelogramului dacă şi numai dacă $p=2$.

2) Fie $p\geq 1$ şi $e_1,e_2\in L^p([0,1])$, unde e_1 şi e_2 sunt funcțiiile caracteristice ale intervalului $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, respectiv $\left[\frac{1}{2},0\right]$.

Să se arate că dacă $\|e_1+e_2\|_p^2+\|e_1-e_2\|_p^2=2\left(\|e_1\|_p^2+\|e_2\|_p^2\right)$, atunci $p=2$.

3) Fie *X* un spațiu normat prehibertian având proprietatea: pentru fiecare $f\in X'$, există $y\in X$ astfel încât $f(x)=\langle x,y\rangle$, oricare ar fi $x\in X$.

Să se arate că *X* este spațiu Hilbert.

4) Fie $K=\left\{x\in\ell^2:\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\cdot\left|n\cdot x_n-1\right|\le 1, x=\left(x_n\right)_{n\ge 1}\right\}$ o mulțime din spațiul ℓ^2.

Să se arate că în mulțimea K există şi este unic un element de cea mai mică normă.

Soluție. Este suficient să arătăm că mulțimea K este convexă şi închisă. Să considerăm pentru aceasta $p:\ell^2\to\mathbb{R}$, $p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left|x_n\right|$, $x=\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ şi $x_0=\left(n^{-1}\right)_{n\ge 1}$. Atunci $K=\left\{x:p\left(x-x_0\right)\le 1\right\}$. Se arată uşor că p este o normă pe ℓ^2, iar din egalitatea de mai sus rezultă că mulțimea K este convexă. Avem apoi $p(x)\le\|x\|_2\left\|\left(n^{-1}\right)_n\right\|_2$ şi deci p este continuă. Din $K=\left\{x:p\left(x-x_0\right)\le 1\right\}$ deducem că mulțimea K este închisă. Mulțimea K fiind convexă şi închisă are atunci un element de cea mai mică normă (unic). □

5) Fie $X=\left\{x=\left(x_n\right)_{n\ge 1}:x_n\in\mathbb{R},\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\cdot x_n^2<\infty\right\}$ şi $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\cdot x_n^2\right)^{1/2}$.

Să se arate că:

a) $\|\ \|$ este o normă pe X;

b) X înzestrat cu norma precedentă devine spațiu Hilbert;

c) Spațiile X şi ℓ^2 sunt izomorfe ca spații normate.

Soluție. Fie $T:X\to\ell^2$ aplicația $T(x)=\left(n^{-1/2}\cdot x_n\right)_{n\ge 1}$. Evident T este o aplicație liniară. Avem $\left\|T(x)\right\|_2=\|x\|$, deci T este izometrică, de unde rezultă că este injectivă. Operatorul T este surjectiv, căci dacă $y\in\ell^2$, $y=\left(y_n\right)_{n\ge 1}$, iar $x=\left(n^{1/2}\cdot y_n\right)_{n\ge 1}$, atunci $x\in X$ şi $T(x)=y$. Spațiul X fiind atunci izomorf cu ℓ^2

este spațiu Banach. Norma considerată pe X este generată de produsul scalar $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cdot x_n y_n$ şi deci $\left(X, \| \ \|\right)$ este spațiu Hilbert. □

6) Fie $1 < p < 2$ şi $1/p + 1/q = 1$.

a) Să se arate că $\ell^p \subset \ell^q$, $\ell^p \subset \ell^2$;

b) Fie $\varphi : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$.

Să se arate că φ este un produs scalar, deci $\left(\ell^2, \| \ \|_2\right)$ este spațiu prehilbertian;

c) Să se arate că $\left(\ell^p, \| \ \|_2\right)$ nu este spațiu Hilbert.

7) Pe spațiul Hilbert complex $\ell^2_{\mathbb{C}}$ fie operatorul $U(x) = (a_n x_n)_{n\geq 1}$, unde $x = (x_n)_{n\geq 1}$, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit de numere reale. Operatorul U este atunci autoadjunct, spectrul său fiind închiderea mulțimii $\{a_n : n \geq 1\}$. Spre exemplu, dacă $a_n = 1/n$, $n \geq 1$, atunci spectrul operatorului corespunzător este mulțimea $\{0, 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\}$. □ ▪

7

A L G E B R E   B A N A C H

Teoria algebrelor Banach este una dintre ramurile moderne ale Analizei funcționale, care are numeroase aplicații în analiza armonică, teoria operatorilor liniari etc.

În acest capitol prezentăm câteva concepte de bază din teoria algebrelor Banach.

Considerăm algebre complexe, cu unitate.

7.1. Noțiunea de algebră Banach

Definiție. Un spațiu liniar A se numeşte *algebră (asociativă)* dacă şi numai dacă este definită o operație $(x,y)\mapsto xy$, $A\times A\to A$, numită *înmulțirea elementelor* din A, astfel încât satisface următoarele axiome:

1) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\, x,y,z\in A$;

2) $x(y+z) = xy+xz$, $\forall\, x,y,z\in A$;

$(y+z)x = yx+zx$, $\forall\, x,y,z\in A$;

3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, $\forall\, x,y\in A$, $\forall\, \alpha\in\mathbb{C}$.

Dacă există un element e în A astfel încât $xe = ex = x$, pentru oricare x din A, atunci algebra A se numeşte *algebră cu unitate*.

Elementul e se numeşte *unitatea algebrei A*.

Dacă înmulțirea este comutativă, adică $xy = yx$, pentru oricare x şi y din A, atunci algebra A se numeşte *algebră comutativă*.

Observație. Unitatea unei algebre, dacă există, este unică.

Justificare. Dacă există un alt element e' astfel încât $xe' = e'x = x$, pentru oricare x din A, atunci $ee' = e'e = e$ şi $e'e = ee' = e'$, deci $e = e'$. □

Definiție. Un spațiu liniar normat A se numeşte *algebră normată*, dacă este algebră şi dacă verifică următoarea axiomă:

$$\|xy\| \le \|x\|\|y\|, \ \forall\, x, y \in A .$$

Dacă o algebră normată A este completă ca spațiu liniar normat (adică este spațiu Banach), atunci algebra A se numeşte *algebră Banach*.

Observații.

1) Dacă o algebră normată A are unitate e, atunci există o normă echivalentă cu norma dată astfel încât $\|e\| = 1$.

2) Din $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$, rezultă $\|x^n\| \le \|x\|^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

Propoziție. *Într-o algebră normată, operația de înmulțire este continuă.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ două şiruri de elemente dintr-o algebră normată A, astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$.

Atunci:

$$\begin{aligned}\|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y\| \\ &\le \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|.\end{aligned}$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n y_n - xy\| = 0$. □

Exemple de algebre Banach.

1) Corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ este cel mai simplu exemplu de algebră Banach, în care norma este definită de modul $\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, pentru fiecare $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ este algebră Banach comutativă, cu unitate.

2) Fie spațiul Banach $C([0,1])$ al funcțiilor complexe continue $f:[0,1] \to \mathbb{C}$, cu norma $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$. Atunci $C([0,1])$, cu produsul obişnuit de funcții, este algebră cumutativă, cu unitate $e(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$. Observăm că dacă $f, g \in C([0,1])$, atunci $\|f \cdot g\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)\cdot g(t)| \le \|f\|\cdot\|g\|$.

Deci $C([0,1])$ este algebră Banach comutativă, cu unitate.

3) Algebra funcțiilor analitice pe discul $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$ şi continue pe $|z| = 1$ este algebră Banach, numită *algebra disc*.

4) Fie $\mathcal{B}(X)$ algebra Banach a operatorilor liniari şi continui pe un spațiu Banach *X*. Definim înmulțirea a doi operatori liniare $T, S : X \to X$ prin operația de compunere a operatorilor: $(TS)(x) = T(S(x))$, pentru oricare *x* din *X*.

Dacă $T, S \in \mathcal{B}(X)$, atunci:

$$\|(TS)(x)\| \le \|T\|\|S(x)\| \le \|T\|\|S\|\|x\|, \forall x \in X.$$

Astfel, rezultă că $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ şi $\mathcal{B}(X)$ este algebră normată cu unitate I, unde $I(x) = x$, $\forall\, x \in X$.

Deoarece $\mathcal{B}(X)$ este spațiu Banach, rezultă că $\mathcal{B}(X)$ este algebră Banach necomutativă, cu unitate. $\mathcal{B}(X)$ este numită *algebra operator*.

7.2. Elemente inversabile. Spectrul

Fie A o algebră Banach complexă, cu unitate e.

Definiție. Un element x al unei algebre A cu unitate e se numeşte *inversabil* dacă există un element y în A astfel încât $xy = yx = e$.

Inversul y al unui element x se notează x^{-1}.

Mulțimea elementelor inversabile ale lui A se notează $\mathrm{Inv}(A)$.

Observație. Inversul unui element este unic.

Justificare. Presupunem că x este un element inversabil din A, adică există x^{-1} cu proprietatea $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Presupunem că mai există un element z în A cu proprietatea $xz = zx = e$. Atunci $\left(x^{-1} - z\right)x = 0 = x\left(x^{-1} - z\right)$, dar elementul $0 \neq e$ şi, deci, $x^{-1} = z$. □

Definiție. O algebră cu unitate se numeşte *corp*, dacă fiecare element nenul al ei este inversabil.

Propoziție. *Dacă x este un element din A, cu $\|x\|<1$, atunci elementul $e-x$ este inversabil în A şi*

$$(e-x)^{-1}=e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{, unde } x^0=e.$$

Demonstrație. Notăm $s_n=e+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$.

Atunci:

$$\begin{aligned}\|s_n-s_{n+p}\| &= \|x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+p}\| \le \sum_{k=1}^{p}\|x\|^{n+k} = \\ &= \|x\|^{n+1}\cdot\frac{1-\|x\|^p}{1-\|x\|}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

Deci $(s_n)_n$ este şir Cauchy şi, A fiind algebră Banach, există un element $s\in A$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$. Avem:

$$\begin{aligned}s(e-x) &= \left(\lim_{n\to\infty}s_n\right)(e-x)=\lim_{n\to\infty}(s_ne-s_nx), \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(e-x^{n+1}\right)=e,\end{aligned}$$

adică $s(e-x)=e$.

În acelaşi fel rezultă că $(e-x)s=e$.

În concluzie, elementul $e-x$ este inversabil şi inversul său este $e+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$. □

Corolar. *Dacă $x\in A$ şi $\lambda\in\mathbb{C}$ astfel încât $\|x\|<|\lambda|$, atunci $x-\lambda e\in\mathrm{Inv}(A)$.*

Demonstrație. Rezultă din implicații $\|x/\lambda\|<1 \Rightarrow e-x/\lambda \in \operatorname{Inv}(A) \Leftrightarrow x-\lambda e \in \operatorname{Inv}(A)$. □

Teorema 1. *Mulțimea elementelor inversabile* $\operatorname{Inv}(A)$ *este submulțime deschisă a lui A.*

Demostrație. Fie un element oarecare $x \in \operatorname{Inv}(A)$. Notăm $S(x)=\left\{y \in A : \|y-x\|<1/\|x^{-1}\|\right\}$. Dacă $y \in S(x)$, atunci avem $\|x^{-1}y-e\|=\|x^{-1}(y-x)\| \le \|x^{-1}\|\|y-x\|<1$.

Aplicând propoziția precedentă, rezultă că $x^{-1}y \in \operatorname{Inv}(A)$.

De asemenea, există $\left(x^{-1}y\right)^{-1}x^{-1}=y^{-1}\left(xx^{-1}\right)=y^{-1}e=y^{-1}$.

Deci $S(x) \subset \operatorname{Inv}(A)$, pentru oricare $x \in \operatorname{Inv}(A)$, adică $\operatorname{Inv}(A)$ este mulțime deschisă. □

Corolar. *Mulțimea elementelor neinversabile ale lui A este închisă.*

Propoziție. *Aplicația* $x \mapsto x^{-1}$ *este homeomorfism al lui* $\operatorname{Inv}(A)$ *pe* $\operatorname{Inv}(A)$.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un şir de elemente din $\operatorname{Inv}(A)$ şi $x \in \operatorname{Inv}(A)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Fie $\|x_n - x\| \le 1/\left(2\|x^{-1}\|\right)$.

Atunci:

$$\begin{aligned}\|x_n^{-1}\|-\|x^{-1}\| &\le \|x_n^{-1}-x^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x-x_n)x^{-1}\| \\ &\le \|x_n^{-1}\|\|x-x_n\|\|x^{-1}\| \le \tfrac{1}{2}\cdot\|x_n^{-1}\|.\end{aligned}$$

De aici rezultă că $\left\|x_n^{-1}\right\| \leq 2\left\|x^{-1}\right\|$.

Apoi,

$$\begin{aligned}\left\|x_n^{-1} - x^{-1}\right\| &= \left\|x_n^{-1}\left(x - x_n\right)x^{-1}\right\| \leq \left\|x_n^{-1}\right\|\left\|x - x_n\right\|\left\|x^{-1}\right\| \\ &\leq 2 \cdot \left\|x^{-1}\right\|^2 \left\|x - x_n\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Deci, $\lim\limits_{n \to \infty}\left\|x_n^{-1} - x^{-1}\right\| = 0$.

Ținând cont că $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, rezultă că aplicația $x \mapsto x^{-1}$ este homeomorfism al lui $\operatorname{Inv}(A)$ pe $\operatorname{Inv}(A)$. □

Definiție. *Spectrul unui element* x al unei algebre A cu unitate *e* este, prin definiție, mulțimea

$$\sigma(x) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin \operatorname{Inv}(A)\right\}.$$

Dacă $\lambda \notin \sigma(x)$, adică dacă există $(x - \lambda e)^{-1}$, atunci λ se numeşte *număr regulat* pentru x.

Fie $x \in A$. Funcția $R_x : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to A$ definită prin

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

se numeşte *funcția rezolventă* a elementului *x*.

Raza spectrală a elementului *x* este definită de:

$$r(x) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\right\}.$$

Teorema 2. *Fie* $x \in A$. *Atunci spectrul* $\sigma(x)$ *este submulțime compactă a lui* $\mathbb{C}$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că $\sigma(x)$ este mulțime mărginită şi închisă (conform teoremei Heine-Borel).

Fie $\lambda \in \sigma(x)$. Atunci $x - \lambda e \notin \operatorname{Inv}(A)$ implică $\|x\| \geq |\lambda|$.

Deci, $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$, adică $\sigma(x)$ este mulțime mărginită.

Arătăm că $\sigma(x)$ este mulțime închisă. Fie $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, adică $x - \lambda_0 e \in \mathrm{Inv}(A)$. Definim funcția $f : \mathbb{C} \to A$ prin $f(\lambda) = x - \lambda e$.

Din teorema 1 rezultă că $S(f(\lambda_0)) \subset \mathrm{Inv}(A)$.

Fie $\lambda \to \lambda_0$. Atunci $f(\lambda) \to f(\lambda_0)$. Astfel, există o vecinătate $V(\lambda_0)$ a lui λ_0 astfel încât $\lambda \in V(\lambda_0)$ implică $f(\lambda) \in S(f(\lambda_0))$. De aici rezultă că :

$\lambda \in V(\lambda_0) \quad \Rightarrow \quad f(\lambda) \in \mathrm{Inv}(A) \quad \Leftrightarrow \quad x - \lambda e \in \mathrm{Inv}(A) \quad \Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Deci $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ este mulțime deschisă, echivalent, $\sigma(x)$ este mulțime închisă. □

Propoziție. *Fie* $x \in A$. *Atunci funcția rezolventă verifică ecuația rezolventă a lui Hilbert:*

$$R_x(\lambda) - R_x(\mu) = (\mu - \lambda) R_x(\lambda) R_x(\mu), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

Demonstrație. Fie $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Avem egalitățile:

$$\begin{aligned} R_x(\lambda) &= R_x(\lambda)(\mu e - x) R_x(\mu) \\ &= R_x(\lambda)\left[(\mu - \lambda)e + \lambda e - x\right] R_x(\mu) \\ &= R_x(\lambda)(\mu - \lambda) R_x(\mu) + R_x(\lambda)(\lambda e - x) R_x(\mu) \\ &= (\mu - \lambda) R_x(\lambda) R_x(\mu) + R_x(\mu), \end{aligned}$$

de unde rezultă $R_x(\lambda) - R_x(\mu) = (\mu - \lambda) R_x(\lambda) R_x(\mu)$. □

Propoziție. *Fie* $x \in A$. *Atunci funcția rezolventă* $R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ *a elementului x este analitică pe* $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Demonstrație. Fie $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Atunci, ținând cont de cele precedente, avem:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_x(\lambda) - R_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left[-R_x(\lambda) R_x(\lambda_0) \right] = -\left[R_x(\lambda_0) \right]^2,$$

de unde rezultă că $R_x(\lambda)$ este analitică. □

Propoziție. *Fie A este o algebră Banach complexă cu unitate e. Fie* $x \in A$ *şi* $f \in A^*$.

Atunci funcția $g(\lambda) = f\left((x - \lambda e)^{-1} \right)$ *este analitică pe* $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Demonstrație. Fie $x \in A$ şi $f \in A^*$ *şi* $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Atunci avem:

$$\left\| \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - f\left(R'_x(\lambda_0) \right) \right\| = \left\| f\left(\frac{R_x(\lambda) - R_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - R'_x(\lambda_0) \right) \right\|$$

$$\leq \|f\| \left\| \frac{R_x(\lambda) - R_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - R'_x(\lambda_0) \right\|,$$

unde $R'_x(\lambda_0)$ este derivata funcției rezolvente în punctul λ_0.

Deci există $g'(\lambda_0) = f\left(R'_x(\lambda_0) \right)$. Funcția rezolventă fiind analitică, rezultă că *g* este analitică. □

Teorema 3. *Fie A o algebră Banach complexă, cu unitate e şi* $x \in A$. *Atunci* $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Demonstrație. Dacă $\sigma(x)=\varnothing$, atunci există $(x-\lambda e)^{-1}$ pentru oricare $\lambda\in\mathbb{C}$. Fie $f\in A^*$ şi $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită prin $g(\lambda)=f\left((x-\lambda e)^{-1}\right)$.

Aplicând propoziția precedentă, rezultă că funcția g este întreagă. Dacă $\lambda\neq 0$, atunci:

$$|g(\lambda)| = \left|f\left((x-\lambda e)^{-1}\right)\right| = (1/|\lambda|)\cdot\left|f\left((x/\lambda-e)^{-1}\right)\right|.$$

Astfel, dacă $|\lambda|\to\infty$, atunci $g(\lambda)\to 0$.

Deci funcție g este funcție mărginită pe $\mathbb{C}$.

Aplicăm teorema lui Liouville şi rezultă că funcția g este constantă: $g(\lambda)=g(0)$ pentru oricare $\lambda\in\mathbb{C}$.

Dar, $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} g(\lambda)=0$. Deci $g(\lambda)=f\left((x-\lambda e)^{-1}\right)=0$ pentru oricare $\lambda\in\mathbb{C}$ şi pentru oricare $f\in A^*$.

Prin urmare, rezultă că $(x-\lambda e)^{-1}=0$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, adică $e=(x-\lambda e)(x-\lambda e)^{-1}=0$, ceea ce este absurd (întrucât $A\neq\{0\}$).

În concluzie, $\sigma(x)\neq\varnothing$. □

Teorema 4 (Teorema Gelfand-Mazur). *Dacă A este algebră Banach complexă care este corp, atunci A este izomorfă cu corpul numerelor complexe* $\mathbb{C}$.

Demonstrație. Fie $x\in A$. Atunci $\sigma(x)\neq\varnothing$. Deci există $\lambda\in\sigma(x)$ astfel încât $x-\lambda e$ nu are invers. Deoarece A este corp, rezultă că $x-\lambda e=0$.

Deci, pentru fiecare $x \in A$, există $\lambda \in \mathbb{C}$, astfel încât $x = \lambda e$.

Numărul λ este unic, pentru că dacă $x = \lambda e$ şi $x = \mu e$, atunci $0 = (\lambda - \mu) e$, de unde rezultă că $\lambda = \mu$.

Aplicaţia $f : A \to \mathbb{C}$, definită prin $f(x) = \lambda$, cu $x = \lambda e$, este izomorfism.

Astfel, avem $A = \mathbb{C}e$. □

Observaţie. O algebră Banach complexă care este corp este în mod necesar comutativă şi de dimensiune 1.

7.3. Funcţionale liniare şi multiplicative

Funcţionalele liniare multiplicative sunt un instrument de bază în studiul algebrelor Banach comutative complexe.

Fie *A* o algebră complexă.

Definiţie. O funcţională liniară nenulă $f : A \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţională liniară multiplicativă* (sau *caracter*) dacă verifică egalitatea $f(xy) = f(x) f(y)$, $\forall\, x, y \in A$.

Definiţie. O funcţională liniară nenulă $f : A \to \mathbb{C}$ este numită *funcţională Jordan* dacă $f(x^2) = [f(x)]^2$, $\forall\, x \in A$.

Propoziţie. *Dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este o funcţională Jordan, atunci f este multiplicativă.*

Demonstrație. Fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcțională Jordan şi $x, y \in A$. Atunci $f\left((x+y)^2\right) = \left[f(x+y)\right]^2$, de unde rezultă că $f(xy+yx) = 2f(x)f(y)$.

Dacă *A* este comutativă , atunci *f* este multiplicativă.

Dacă *A* este necomutativă, presupunem că *f* nu este multiplicativă. Atunci există $a, b \in A$, cu proprietatea că $f(a) = 0$ şi $f(ab) = 1$. Pe de o parte, avem următoarele egalități: $f(ab) + f(ba) = f(ab+ba) = 2f(a)f(b) = 0$, iar pe de altă parte $f(ab) + f(ba) = 1 + f(ba)$. Astfel rezultă că $f(ba) = -1$.

Apoi, fie $c = bab$. Atunci, pe de o parte avem:

$$\begin{aligned} f(ac+ca) &= f(ac) + f(ca) \\ &= f(a)f(c) + f(c)f(a) \\ &= 2f(a)f(c) = 0, \end{aligned}$$

iar pe de altă parte:

$$\begin{aligned} f(ac+ca) &= f\left(a(bab) + (bab)a\right) \\ &= f\left((ab)^2\right) + f\left((ba)^2\right) \\ &= \left[f(ab)\right]^2 + \left[f(ba)\right]^2 = 2. \end{aligned}$$

Prin urmare, am ajuns la o contradicție.

Deci, f este multiplicativă. □

Teorema 5 (Teorema Gleason-Kahane-Želazko). *Fie A o algebră complexă, cu element unitate e şi* $f : A \to \mathbb{C}$ *o funcțională liniară cu proprietate* $f(e) = 1$. *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) $\operatorname{Ker} f = A \setminus \operatorname{Inv}(A)$;

ii) $f(x) \in \sigma(x)$;

iii) $f(xy) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in A$.

Demonstrație. Demonstrăm (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*i*) $\Leftrightarrow$ (*iii*).

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Egalitatea $f\big(f(x)e - x\big) = 0$ este adevărată pentru oricare $x \in A$. Aceasta înseamnă, prin (*i*), că $f(x)e - x$ nu este inversabil, adică $f(x) \in \sigma(x)$.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): Dacă $x \in A$ este inversabil şi $x \in \operatorname{Ker} f$, atunci $f(x) = 0 \notin \sigma(x)$, o contradicție.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Fie $x \in A$. Presupunem că x este invesabil şi că $x \in \operatorname{Ker} f$. Atunci $0 = f(x^{-1}) f(x) = f(x^{-1}x) = f(e) = 1$, ceea ce este fals.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iii*): Fie $x \in A$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\|x\| \leq 1$ şi $|\lambda| > 1$. Atunci elementul $y = e - x/\lambda$ este inversabil şi $f(y) \neq 0$, deci $f(x) \neq \lambda$ şi $\|f\| \leq 1$.

Funcția $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $g(\alpha) = f\big(\exp(\alpha x)\big)$ este analitică, mărginită şi nenulă. Atunci există $\beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $g(\beta) = \exp(\alpha\beta)$.

Prin urmare, $f(x^n) = \beta^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

În consecință, funcționala *f* este funcțională Jordan, deci multiplicativă. □

Teorema 6. *Dacă* $f : A \to \mathbb{C}$ *este o funcțională liniară multiplicativă pe A, atunci f este continuă și* $\|f\| \le 1$.

Demonstrație. Presupunem că există $z \in A$ astfel încât $|f(z)| > \|z\|$. Atunci $z \ne 0$ și $f(z) \ne 0$. Notăm $x = z/f(z)$ și observăm că $\|x\| < 1$ și $f(x) = 1$.

Astfel, rezultă că există $y = \sum_{n=1}^{\infty}(-x^n)$ și $xy = x + y$.

Deci, $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$, adică $f(y) = 1 + f(y)$, ceea ce este fals.

În concluzie, *f* este continuă și $\|f\| \le 1$. □

7.4. Teorema Stone-Weierstrass

Teorema de aproximare, demonstrată de Weierstrass în 1885, afirmă că funcțiile reale continue pe un interval compact pot fi aproximate uniform prin polinoame. Cu alte cuvinte, polinoamele sunt uniform dense în $C([0,1],\mathbb{R})$ în raport cu norma $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

Berstein a dat, în 1911, o demonstrație elementară teoremei lui Weierstrass. Berstein a folosit un algoritm de aproximare a unei funcții printr-o clasă de polinoame, numite polinoamele Berstein.

Teorema Stone-Weierstrass, demonstrată de Stone în 1937, are drept caz special teorema lui Weierstrass.

Definiție. *Polinomul Berstein de gradul* n asociat unei funcții $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ este definit prin:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot C_n^k \cdot x^k (1-x)^{n-k} .$$

Teorema de aproximare a lui Weierstrass. *Dacă* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$*, atunci şirul de polinoame Berstein* $(B_n(f))_n$ *converge uniform către* f *, i.e* $\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$. ■

Fie X un spațiu metric compact. Fie $C(X,\mathbb{R})$ algebra Banach cu unitate a tuturor funcțiilor $f : X \to \mathbb{R}$ continue, cu norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Fie $A \subset C(X,\mathbb{R})$ o subalgebră care conține unitatea.

Observație. O subalgebră $A \subset C(X,\mathbb{R})$ care conține unitatea, conține toate funcțiile constante.

Definiție. O subalgeră $A \subset C(X,\mathbb{R})$ *separă punctele* lui X dacă pentru oricare $x, y \in X$, $x \neq y$, există $f \in A$ astfel încât $f(x) \neq f(y)$.

Exemplu. Mulțimea polinoamelor $P([a,b],\mathbb{R})$ este o subalgebră în $C([a,b],\mathbb{R})$ care are unitate şi separă punctele lui $[a,b]$.

Teorema Stone-Weierstrass. *Dacă* X *este un spațiu metric compact şi* $A \subset C(X,\mathbb{R})$ *este o subalgebră care conține unitatea şi separă punctele lui* X *, atunci* $\overline{A} = C(X,\mathbb{R})$.

Demonstrație. Mai întâi, vom arăta că dacă $f \in \overline{A}$, atunci $|f| \in \overline{A}$. Întrucât f este funcție continuă pe un spațiu compact, atunci f este mărginită, adică există $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \le f \le b$.

Din teorema de aproximare a lui Weierstrass rezultă că pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există un polinom p astfel încât $\big|p(x) - |x|\big| < \varepsilon \quad (x \in [a,b])$.

Fie funcția $g : X \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = p(f(x))$. Rezultă că $g \in A$. Astfel, pentru oricare $x \in X$, avem $\big|g(x) - |f(x)|\big| < \varepsilon$. De aici rezultă că $|f| \in \overline{A}$.

Dacă $f,g \in \overline{A}$, atunci $\min(f,g) = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|) \in \overline{A}$ şi $\max(f,g) = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|) \in \overline{A}$.

În al doilea rând, vom arăta că dacă $f \in C(X,\mathbb{R})$, $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$, atunci există $g_x \in \overline{A}$ astfel încât $g_x \le f + \varepsilon$ şi $g_x > f$. Fie $x, y \in X$, $x \ne y$. Atunci există $\tilde{h}_{xy} \in A$ astfel încât $\tilde{h}_{xy}(x) \ne \tilde{h}_{xy}(y)$.

Definim funcția h_{xy} prin $h_{xy}(z) = a\tilde{h}_{xy}(z) + b \quad (z \in X)$, unde $a,b \in \mathbb{R}$ au fost alese astfel încât $h_{xy}(x) = f(x) + \varepsilon/2$ şi $h_{xy}(y) = f(y) - \varepsilon/2$. Rezultă că $h_{xy} \in A$.

Definim mulțimea $U_{xy} = \left\{ z \in X : h_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon \right\}$. Din continuitatea funcțiilor f şi h_{xy}, rezultă că mulțimea U_{xy} este deschisă. Deoarece $x, y \in U_{xy}$, rezultă că familia de mulțimi $\left\{ U_{xy} : y \in X \setminus \{x\} \right\}$ este o acoperire deschisă a lui X. Din compacitatea spațiului X, rezultă că există o submulțime finită $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset X$ astfel încât $X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{xy_k}$.

Definim $g_x = \min\left(h_{xy_1}, h_{xy_2}, \cdots, h_{xy_n} \right)$. Atunci $g_x \in \overline{A}$. Prin construcție, $g_x(x) = f(x) + \varepsilon/2$ şi $g_x < f + \varepsilon$.

Pentru fiecare $x \in X$, definim mulțimea următoare: $V_x = \left\{ z \in X : g_x(z) > f(x) \right\}$. Întrucât funcțiile f şi g_x sunt continue, rezultă că V_x este mulțime deschisă. Deoarece $g_x(x) = f(x) + \varepsilon/2 > f(x)$, avem $x \in V_x$. Deci $\{V_x : x \in X\}$ este o acoperire deschisă a lui X.

Spațiul X fiind compact, rezultă că există o submulțime finită $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ astfel încât $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}$.

Definim $g(z) = \max\left\{ g_{x_1}(z), g_{x_2}(z), \cdots, g_{x_n}(z) \right\}$. Atunci $g \in \overline{A}$. Prin construcție, $g \geq f$. În fine, întrucât $g_x < f + \varepsilon$ pentru fiecare $x \in X$, avem $g < f + \varepsilon$.

În concluzie, pentru fiecare $f \in C(X, \mathbb{R})$ şi fiecare $\varepsilon > 0$, există o funcție $g \in \overline{A}$ astfel încât $f \leq g < f + \varepsilon$.

Aceasta implică $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$. □ ▪

A N E X E

Anexa 1. Mulțimi ordonate

Fie X şi Y două mulțimi nevide. Amintim că mulțimea perechilor ordonate (x, y), unde $x \in X$ şi $y \in Y$, se numeşte *produsul cartezian* al mulțimii X cu mulțimea Y şi se notează $X \times Y$.

Definiție. Se numeşte *relație de ordine* în mulțimea X orice submulțime nevidă $D \subset X \times X$ având proprietățiile:

i) $(x, x) \in D$ pentru orice $x \in X$;

ii) Dacă $(x, y) \in D$ şi $(y, x) \in D$, atunci $x = y$;

iii) Dacă $(x, y) \in D$ şi $(y, z) \in D$, atunci $(x, z) \in D$.

Proprietățile precedente se numesc respectiv *reflexivitatea*, *antisimetria* şi *tranzitivitatea* relației de ordine D.

În loc de $(x, y) \in D$ se notează de obicei $x \leq y$ (x mai mic sau egal cu y) şi proprietățile din definiție se descriu atunci astfel:

i) $x \leq x$ pentru orice $x \in X$;

ii) Dacă $x \leq y$ şi $y \leq x$, atunci $x = y$;

iii) Dacă $x \leq y$ şi $y \leq z$, atunci $x \leq z$.

Perechea $(X, \leq)$ se numeşte atunci *mulțimea ordonată* şi, dacă nu există posibilitatea unei confuzii, se vorbeşte despre

mulțimea ordonată X. Spre exemplu, dacă M este o mulțime nevidă şi $\mathcal{P}(M)$ este familia părților sale, prin $A \le B \Leftrightarrow A \subset B$ se defineşte o relație de ordine în $\mathcal{P}(M)$.

Fie X o mulțime ordonată şi $A \subset X$, $A \ne \varnothing$.

Definiție. Elementul $x \in X$ se numeşte *majorant* (*minorant*) pentru mulțimea A dacă $a \le x$ ($x \le a$) pentru orice $a \in A$.

Dacă pentru mulțimea A există un majorant (minorant) se spune că A este *majorată* (*minorată*).

O mulțime care este majorată şi minorată se numeşte *mărginită* (în sensul ordinii).

Observație. În mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților lui M avem $\varnothing \le A \le M$ pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(M)$ şi deci orice submulțime a lui $\mathcal{P}(M)$ este mărginită.

Definiție. Elementul $x \in X$ se numeşte *cel mai mare* (*mic*) *element* al mulțimii A dacă este *majorant* (*minorant*) pentru mulțimea A şi aparține mulțimii A.

Se notează $x = \max A$ ($x = \min A$).

Definiție. Elementul $x \in X$ se numeşte *margine superioară* (*margine inferioară*) a mulțimii majorate (minorate) A, cel mai mic (mare) majorant (minorant) pentru mulțimea A.

Se notează $x = \sup A$ ($x = \inf A$).

Avem deci:

$$x = \sup A \ \Leftrightarrow \ x = \min\{y : a \le y, \forall\, a \in A\},$$

$$x = \inf A \ \Leftrightarrow \ x = \max\{y : y \le a, \forall\, a \in A\}.$$

Observație. Dacă există, marginea superioară (inferioară) este atunci unică.

Exemplu. Dacă $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$ şi

$$B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,\ C = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A,$$

atunci, în raport cu ordinea considerată mai sus în $\mathcal{P}(M)$, avem $B = \sup \mathcal{A}$, $C = \inf \mathcal{A}$.

Nu pentru orice mulțime majorată (minorată) există marginea superioară (inferioară). Spre exemplu, pornind de la axiomele lui Peano, se consideră mulțimea numerelor naturale, se generează după schema uzuală mulțimea ordonată $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale. Dacă $A = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0,\ a^2 < 2\}$, atunci A este majorată şi nu admite margine superioară (în $\mathbb{Q}$).

Definiție. Mulțimea ordonată X se numeşte *complet ordonată* dacă:

– pentru orice submulțime nevidă şi majorată există margine superioară,

– pentru orice submulțime nevidă şi minorată există margine inferioară.

Se spune atunci că *ordinea este completă*.

Observație. Mulțimea $\mathcal{P}(M)$ este complet ordonată.

Propoziție. *Fie X o mulțime ordonată. Afirmațiile următoare sunt echivalente:*

i) X este complet ordonată;

ii) Pentru orice submulțime nevidă şi majorată există margine superioară;

iii) Pentru orice submulțime nevidă şi minorată există margine inferioară.

Demonstrație. Pentru a arăta că $ii) \Rightarrow iii)$, fie $A \subset X$, A minorată. Fie $B = \{x \in X : x \le a, \forall\, a \in A\}$. Mulțimea B este nevidă, majorată şi conform ipotezei există $z = \sup B$. Dacă $a \in A$, atunci $x \le a$ pentru orice $x \in B$, adică a este un majorant pentru B şi prin urmare $z \le a, \forall\, a \in A$. Aceasta arată că z este un minorant pentru A, iar dacă y este apoi un minorant pentru A, avem $y \in B$, deci $y \le x$ şi prin urmare z este cel mai mare minorant pentru A, adică $z = \inf A$.

Analog se arată că $iii) \Rightarrow ii)$. □

Definiție. Mulțimea ordonată X se numeşte *total ordonată* dacă pentru orice pereche $(x, y) \in X \times X$ avem $x \le y$ sau $y \le x$.

Se spune că atunci că *ordinea* pe X este *totală*.

Observație. Dacă M nu se reduce la un singur element, mulțimea $\mathcal{P}(M)$ nu este total ordonată.

După o construcție directă pornind de le axiomele lui Peano, mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este total ordonată.

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este apoi total ordonată. (Într-o prezentare axiomatică, mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este un corp total şi complet ordonat).

Fie X o mulțime ordonată.

Definiție. Elementul $x \in X$ se numeşte *maximal* (*minimal*) dacă $x \le y \Rightarrow x = y$ ($y \le x \Rightarrow y = x$).

Definiție. Se spune că x este *mai mic* (*mai mare*) decât y dacă $x \leq y$ ($y \leq x$) şi $x \neq y$. Scriem atunci $x < y$ ($y < x$).

Observație. Un element este maximal (minimal) dacă nu admite elemente strict mai mari (mici) decât el.

Spre exemplu, în mulțimea numerelor naturale $\{2,3,\cdots\}$, relația „$x \leq y$ dacă x divide y” este o relație de ordine în raport cu care numerele prime sunt elemente minimale.

Fie E un spațiu vectorial şi $\mathcal{S}$ familia subspațiilor liniare proprii (diferite de subspațiul nul şi de E), ordonată cu relația de incluziune.

Dacă $f : E \to \mathbb{K}$ este o funcțională liniară nenulă, atunci $\mathrm{Ker} f$ este un element maximal în $\mathcal{S}$ (subspațiu maximal).

Reciproc, dacă $\mathcal{S}$ este un subspațiu maximal, el este atunci nucleul unei funcționale liniare nenule.

Definiție. Mulțimea ordonată X se numeşte *inductiv ordonată* dacă orice parte total ordonată dacă orice parte total ordonată a sa este majorată.

Afirmația următoare este, într-un anumit cadru al teoriei mulțimilor, o axoimă. În alt cadru axiomatic ea este o propoziție, cunoscută sub numele de *lema lui Zorn*.

Lemă (Zorn). *În orice mulțime inductiv ordonată există cel puțin un element maximal.* ■

Anexa 2. Teste

Testul 1

Fie $X=\left(C\left[0,1\right],\|\ \|\right)$, $\|x\|=\max\left\{\left|x\left(t\right)\right|:t\in\left[0,1\right]\right\}$.

Fie $U:X\to X$, $U(x)(s)=\int_0^1 s\,t\cdot x(t)\,dt$, $s\in\left[0,1\right]$.

Fie $w(t)=1$, $y\left(t\right)=t-\frac{2}{3}$, $z(t)=3t$, $w_n\left(t\right)=\left(1-t\right)t^n$, $t\in\left[0,1\right]$.

Fie $A=\left\{0;\,1/3\right\}$, $B=\left\{0;\,3\right\}$, $C=\left\{3;\,1/3\right\}$.

1. Deoarece $U(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha U(x_1)+\beta U(x_2))$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x_1,x_2\in X$, operatorul U este _____
2. Deoarece $\|U(x)\|\le 0,5\cdot\|x\|$, $x\in X$, operatorul U este _____
3. $2\|U(w)\|=$_____
4. $2\|U\|=$_____
5. $U(y)=$_____
6. Operatorul U este injectiv? _____
7. Operatorul U este surjectiv? _____
8. U este operator de rang finit? _____
9. Operatorul U este compact? _____
10. $3U(z)=$_____
11. Ecuația $3U(x)=x$ are numai soluția nulă? _____
12. Spectrul operatorului U este mulțimea: *A, B* sau *C*?_____
13. Ecuația $3U(x)-x=f$ are soluție unică $\forall\ f\in X$? _____
14. Ecuația $U(x)=x$ are numai soluția $x=$ _____
15. Ecuația $U(x)=f$ are soluție unică $\forall\ x\in X$? _____
16. Pentru $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}U^n\left(x\right)=$ _____

17. $3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|U^n\right\|}=$ _____

18. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)\left\|w_n\right\|=$ _____

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|w_n\right\|=$ _____

20. $\lim\limits_{n\to\infty}U\left(w_n\right)=$ _____

Testul 2

Fie $X=\left(C\left[0,1\right],\|\ \|\right)$, $\|x\|=\max\left\{\left|x\left(t\right)\right|:t\in\left[0,1\right]\right\}$.

Fie $U:X\to X$, $U(x)(s)=\int_0^1\left(s+t\right)\cdot x(t)\,dt$, $s\in\left[0,1\right]$.

Fie $w(t)=1$, $y\left(t\right)=6t^2-6t+1$, $z(t)=\sqrt{3}\,t+1$, $t\in\left[0,1\right]$.

Fie $p=\sqrt{3}/3+1/2$, $q=-\sqrt{3}/3+1/2$, $A=\left\{p,q\right\}$, $B=\left\{1,p,q\right\}$, $C=\left\{0,p,q\right\}$, $D=\left\{0,1,p,q\right\}$.

1. Deoarece $U(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha U(x_1)+\beta U(x_2)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x_1,x_2\in X$, operatorul U este _____
2. Deoarece $\|U(x)\|\le 1,5\cdot\|x\|$, $\forall\ x\in X$, operatorul U este ___
3. $\|w\|=$ _____
4. $2\|U(w)\|=$ _____
5. $2\|U\|=$ _____
6. $\|I\|=$ _____
7. $U(y)=$ _____
8. Operatorul U este injectiv? _____
9. Operatorul U este surjectiv? _____

10. $\dim U(X) =$ _____
11. U este operator de rang finit? _____
12. Operatorul U este compact? _____
13. $\frac{1}{p} \cdot U(z) =$ _____
14. Ecuația $U(x) = p\,x$ are numai soluția nulă? _____
15. Spectrul operatorului U este mulțimea: *A, B, C* sau *D*? ___
16. Ecuația $U(x) - px = f$ are soluție unică $\forall\, f \in X$? _____
17. Ecuația $U(x) = x$ are numai soluția $x =$ _____
18. Ecuația $U(x) = f$ are soluție unică $\forall\, f \in X$?_____
19. Operatorul $I - U$ este inversabil? _____
20. Operatorul $I - U$ este compact? _____

Testul 3

Fie $X = \left(C\left[0,1\right], \|\ \|\right)$, $\|x\| = \int_0^1 \left|x\left(t\right)\right| dt$.

Fie $U : X \to X$, $U(x)(s) = \int_0^1 s\,t\,x(t)\,dt$, $s \in \left[0,1\right]$.

Fie $z(t) = 1$, $x_n(t) = t^n$, $t \in \left[0,1\right]$.

Fie $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 e^t x\left(t\right) dt$ *şi* $g : X \to \mathbb{R}$, $g\left(x\right) = x\left(1\right)$.

1. Dacă $\|x\| = 0$, atunci $x =$ _____
2. Un spațiu Banach este un spațiu normat: convex, compact, complet sau complex? _____
3. Un spațiu normat în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte spațiu: Hilbert, Cauchy sau Banach? _____
4. X este spațiu: Hilbert, Banach sau normat? _____
5. $\left(n+1\right)\|x_n\| =$ _____

6. $\|z\| =$ _____

7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ _____

8. $U(\alpha x+\beta y)=\alpha U(x)+\beta U(y)$, pentru $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x,y\in X$, şi deci U este _____

9. $2(n+2)\|U(x_n)\|-1=$ _____

10. $4\|U(z)\|=$ _____

11. Pentru orice $x\in X$, numărul $2\|U(x)\|-\|x\|$ este pozitiv, negativ sau zero? _____

12. $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n)=$ ____

13. Operatorul U este compact?_____

14. U este operator de rang finit? _____

15. U este surjectiv? _____

16. U este injectiv? _____

17. Funcţionala g este liniară şi continuă? _____

18. $f(z)=$ _____

19. $\|f\|=$ _____

20. $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=$ ____

Testul 4

Fie spaţiul $\ell^2_{\mathbb{R}}$ *cu norma* $\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$, $x=(x_n)_{n\ge1}$, $x_n\in\mathbb{R}$. *Fie* $U,V,I:\ell^2_{\mathbb{R}}\to\ell^2_{\mathbb{R}}$ *operatorii definiţi prin:* $U(x)=\left(\frac{n+1}{n}x_n\right)_{n\ge1}$, $V(x)=\left(\frac{n}{n+1}x_n\right)_{n\ge1}$. *Fie* $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, *unde* 1 *se află pe locul* k.

1. $U(\alpha x+\beta y)=\alpha U(x)+\beta U(y)$ şi deci U este: linie, liniar sau convergent?_____

2. $V(x+y)=V(x)+V(y)$, $V(\alpha x)=\alpha V(x)$ şi deci V este: liniar, liniat sau linie?_____

3. Pentru orice $x\in\ell^2_{\mathbb{R}}$, numărul $\|U(x)\|-2\|x\|$ este: pozitiv, negativ, nenul sau zero?_____

4. Pentru orice $x\in\ell^2_{\mathbb{R}}$, $\|U(x)\|\le 2\|x\|$ şi deci U este: convergent, compact sau continuu?____

5. $\|e_k\|=$_____

6. $\|U(e_1)\|=$_____

7. $\|U\|=$_____

8. Există $x\in\ell^2_{\mathbb{R}}$, astfel încât $\|V(x)\|-\|x\|$ este un număr strict pozitiv? _____

9. Pentru orice $x\in\ell^2_{\mathbb{R}}$, numărul $\|V(x)\|-\|x\|$ este: pozitiv, negativ sau zero? _____

10. Operatorul V este: convergent, compact sau continuu? __

11. $U\left(e_k\right)-\frac{k+1}{k}e_k=$_____

12. Pentru operatorul U, numărul $\frac{k+1}{k}$ este: regulat sau propriu?_____

13. Pentru operatorul U, numărul $\frac{k}{k+1}$ este: regulat sau propriu?_____

14. Pentru operatorul V, numărul $\frac{k}{k+1}$ este: regulat sau propriu?_____

15. Pentru operatorul V, numărul $\frac{k+1}{k}$ este: regulat sau propriu?_____

16. Operatorul $U-\frac{k+1}{k}I$ este inversabil? _____

17. Operatorul $U-\frac{k}{k+1}I$ este inversabil? _____

18. Operatorul $V-\frac{k}{k+1}I$ este inversabil? _____
19. Operatorul $V-\frac{k+1}{k}I$ este inversabil? _____
20. $U\circ V(x)=$_____

Testul 5

Fie $X=\left(\ell_{\mathbb{R}}^{1},\|\ \|_{1}\right)$, $\|x\|_{1}=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$, $x=(x_n)_{n\geq 1}$ *şi*
$Y=\left(\ell_{\mathbb{R}}^{1},\|\ \|_{\infty}\right)$, $\|x\|_{\infty}=\sup\{|x_n|:n\geq 1\}$, $x=(x_n)_{n\geq 1}$.
Fie $A=\{x\in X:\|x\|_1\leq 1\}$, $B=\{x\in Y:\|x\|_{\infty}\leq 1\}$.
Fie $f:X\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n\geq 1}x_n$ *şi* $g:Y\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sum_{n\geq 1}x_n$.
Fie $Z=\left\{x\in X:\sum_{n\geq 1}x_n=0\right\}$, $W=\left\{x\in Y:\sum_{n\geq 1}x_n=0\right\}$.
Fie $y_n=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\right)$, $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, *unde* 1 *se află pe locul* n.

1. X este spaţiu: Banach, Hilbert, sau cu bază algebrică numărabilă? _____
2. Y este spaţiu: Banach, Hilbert sau cu bază Schauder? _____
3. În spaţiul X şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este: nemărginit, convergent sau Cauchy?_____
4. În spaţiul Y şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este: nemărginit, Cauchy sau convergent? _____
5. Z este subspaţiu: închis, deschis sau dens? _____
6. W este subspaţiu: închis, deschis sau dens? _____
7. A este mulţime: închisă, deschisă sau compactă? _____
8. B este mulţime: închisă, deschisă sau compactă? _____
9. Funcţionala f este: injectivă, surjectivă sau bijectivă? _____

10. Funcționala g este: injectivă, surjectivă sau bijectivă? ____

11. Pentru orice $x \in X$ numărul $\left|f(x)\right| - \|x\|$ este: pozitiv, negativ sau zero?_____

12. Funcționala f este continuă? _____

13. $\|e_n\|_1 =$_____

14. $f(e_n) =$_____

15. $\|f\| =$_____

16. $\|y_n\|_\infty =$_____

17. $\left(g(y_n)\right)_{n\geq 1}$ este şir: convergent, mărginit sau nemărginit?__

18. Funcționala g este: liniară sau continuă?_____

19. Dualul lui $\ell^1_{\mathbb{R}}$ este: $\ell^1_{\mathbb{R}}$, $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ sau $\mathbb{R}$?_____

20. $\ell^1_{\mathbb{R}}$ este reflexiv? _____

Testul 6

Fie $X = \left(\ell^2_{\mathbb{C}}, \|\ \|\right)$, $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in \mathbb{C}$.

Fie $U, V, I : X \to X$ *operatorii definiți prin:*

$U(x) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, $V(x) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$, $I(x) = x$.

Fie $A = \{a \in \mathbb{C} : |a| \leq 1\}$, $B = \{a \in \mathbb{C} : |a| < 1\}$, $C = \{a \in \mathbb{C} : |a| \geq 1\}$.

1. X este spațiu Banach? _____
2. Norma în X verifică legea: paralelelor sau paralelogramului?_____
3. X este spațiu Hilbert? _____
4. Operatorul U este: injectiv, surjectiv sau bijectiv?_____
5. Operatorul V este: injectiv, surjectiv sau bijectiv?_____

6. Operatorul U este: continuu sau compact?_____
7. Operatorul V este: continuu sau compact?_____
8. Operatorul U este: deschis sau închis?_____
9. Operatorul V este: deschis sau inversabil?_____
10. $V \circ U = I$, $U \circ V = I$ sau $U^2 \circ V^2 = I$?_____
11. $\|U\| =$_____
12. $\|V\| =$_____
13. Spectrul lui U este mulțimea: A, B sau C?_____
14. Spectrul lui V este mulțimea: A, B sau C?_____
15. Dacă $|a| < 1$, atunci a este număr propriu pentru U? _____
16. Dacă $|a| < 1$, atunci a este număr propriu pentru V? _____
17. Operatorul U nu are numere proprii?)_____
18. Operatorul V nu are numere proprii? _____
19. $U^* =$_____
20. $V^* =$_____

Testul 7

Fie $X = \left(C[0,1], \|\ \|\right)$, $\|x\| = \max\left\{|x(t)| : t \in [0,1]\right\}$.

Fie Y subspațiul funcțiilor polinomiale.

Fie $Y_n = \left\{p \in Y : grad\ p \leq n\right\}$.

Fie $x_n(t) = t^n, n \geq 1, t \in [0,1]$ *și* $I(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$, $x \in X$.

1. Deoarece în X orice şir Cauchy este convergent, X este spațiu_____
2. Deoarece norma lui X nu verifică legea paralelogramului, X nu este este spațiu_____
3. Y_n este închis? _____

4. Interiorul lui Y_n este mulțimea_____
5. $\overline{Y} =$_____
6. Deoarece X este spațiu complet, el este de categoria _ Baire.
7. Y este de categoria ___ Baire.
8. Interiorul lui $\overline{Y}$ este_____
9. $\|x_n\| =$_____
10. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit? _____
11. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent? _____
12. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\|x_{n+1}-x_n\| =$_____
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| =$_____
14. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) =$_____
15. $I(\alpha x+\beta y) = \alpha I(x)+\beta I(y)$ şi deci I este _____
16. $|I(x)| \leq \|x\|$ şi deci I este_____
17. $\{x \in X : I(x) = 0\}$ este un subspațiu închis? _____
18. $\|I\| =$_____
19. $(n+1)I(x_n) =$_____
20. $\lim\limits_{n\to\infty} I(x_n) =$_____

Testul 8

Fie $\ell^2 = \left\{x = (x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

Fie $U, V, I : \ell^2 \to \ell^2$ *operatorii definiți prin:*

$U(x) = \left(\frac{n+1}{n} x_n\right)_{n\geq 1}$, $V(x) = \left(\frac{n}{n+1} x_n\right)_{n\geq 1}$, $I(x) = x$.

Fie $w = (1/n)_{n\geq 1}$, $e_n = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, *unde* 1 *este pe locul n.*

1. $U(\alpha x+\beta y)=\alpha U(x)+\beta U(y)$ şi deci U este_____
2. $V(x+y)=V(x)+V(y)$, $V(\alpha x)=\alpha V(x)$ şi deci V este operator _____
3. $\|U(x)\|\leq 2\|x\|$ şi deci U este_____
4. $\|U\|=$_____
5. $\|V(x)\|\leq\|x\|$ şi deci V este_____
6. $\|V\|=$_____
7. Ecuația $U\left(x\right)=x$ are soluție nenulă? _____
8. 1 este număr propriu pentru U ?_____
9. Numărul 1 aparține spectrului lui U ?_____
10. Ecuația $U(x)-x=y$ are soluție unică $x\in\ell^2$, pentru orice $y\in\ell^2$?_____
11. Dacă $U(x)-x=w$, atunci $x\notin\ell^2$?_____
12. $\frac{n}{n+1}U\left(e_n\right)-e_n=$_____
13. $\frac{n+1}{n}$ aparține spectrului lui U ?_____
14. $\left(\frac{n+1}{n}\right)V\left(e_n\right)-e_n=$_____
15. $\frac{n}{n+1}$ aparține mulțimii numerelor regulate pentru V ? ____
16. Ecuația $V(x)-x=0$ are soluția $x=$_____
17. 1 este număr propriu pentru V ?_____
18. $U\circ V=$_____
19. $V\circ U=$_____
20. U este compact, V este compact, $U-V$ este compact sau $U+V$ este compact?_____ ▪

Anexa 3. Subiecte de examen

1. Compacitate în $\mathcal{C}[a,b]$ (teorema Arzela-Ascoli).
2. Spații Banach: definiție, caracterizarea cu serii absolut convergente. Completitudinea spațiilor concrete ale Analizei funcționale: $\mathbb{R}^m$, c, c_0, l^∞, $\mathcal{C}[a,b]$, $l^p\ (p \geq 1)$, $L^p[a,b]\ (p \geq 1)$.
3. Mulțimi rare şi teorema lui Baire în spații Banach.
4. Spații liniare normate de dimensiune finită: caracterizarea prin echivalența oricăror două norme, caracterizarea cu vecinănătăşi compacte (teorema lui Riesz).
5. Spații liniare normate cu bază Schauder: definiție, exemple, separabilitate, spații liniare normate fără bază Schauder.
6. Operatori liniari şi continui: caracterizări ale continuității operatorilor liniari. Spațiul operatorilor liniari şi continui: operații, completitudine.
7. Dualul unui spațiu liniar normat: definiție, caracterizarea continuității unei funcționale liniare cu ajutorul nucleului. Dualele spațiilor c, c_0, $\mathcal{C}[a,b]$, l^1, $l^p\ (p \geq 1)$, $L^p[a,b]$ $(p \geq 1)$.
8. Teorema Hahn-Banach de prelungire a funcționalelor liniare şi continue: enunț, consecințe.
9. Convergență slabă în spațiu şi în dual.
10. Principiul mărginirii uniforme (teorema Banach-Steinhaus): enunț, consecințe.
11. Inversul unui operator liniar şi continuu: definiție, lema lui Neumann.
12. Operatori deschişi: definiție, teorema aplicație deschise, consecințe.
13. Operatori închişi: definiție, torema graficului închis.

14. Operatori liniari compacți: definiție, legătura cu operatorii liniari şi continui, operatori de rang finit. Spațiul operatorilor compacți: compacitatea limitei unui şir de operatori compacți. Compacitatea operatorului diagonal în l^2. Compacitatea operatorului integral cu nucleu continuu în $\mathcal{C}[a,b]$. Teorema Riesz-Schauder de inversare a operatorului $I-U$, U compact.
15. Spectrul unui operator liniar şi continuu: definiție, număr regulat, număr propriu, vector propriu. Compacitatea spectrului. Raza spectrală: existența limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|U^n\|}$ şi legătura cu spectrul. Spectrul operatorului diagonal în l^2. Spectrul operatorului integral în $\mathcal{C}[a,b]$ cu nucleu $s+t$ sau st. Spectrul unui operator compact.
16. Spațiile Hilbert l^2, $L^2[a,b]$.
17. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.
18. Existența elementului de cea mai bună aproximare pentru mulțimi convexe şi închise: enunț, consecințe.
19. Familii ortogonale în spații Hilbert: definiție, inegalitatea lui Bessel. Baze ortogonale în spații Hilbert: definiție, caracterizări, exemple.
20. Forma generală a funcționalelor liniare şi continue pe un spațiu Hilbert (teorema lui Riesz): enunț, consecințe, exemple.
21. Adjunctul unui operator liniar şi continuu pe un spațiu Hilbert: definiție, existență, exemple. Proprietăți ale adjunctului unui operatot liniar şi continuu.
22. Operatori autoadjuncți: definiție, proprietăți. Norma unui operator autoadjunct. Exemple de operatori autoadjuncți: operatorul matricial în $\mathbb{R}^m$ $\left(\mathbb{C}^m\right)$, operatorul diagonal în l^2, operatorul integral în $L^2[a,b]$.

23. Spectrul unui operator autoadjunct este real. Marginile spectrului unui operator autoadjunct.
24. Caracterizări pentru numerele regulate şi pentru cele din spectru, pentru un operator autoadjunct. Spectrul unui operator autoadjunct şi compact; existența unei baze ortonormale formată din vectori proprii. ▪

B I B L I O G R A F I E

1. Akilov, G.P.; Kantorovici, L.V.: *Analiză funcțională*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.
2. Cristescu, R.: *Noțiuni de Analiză funcțională liniară*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1998.
3. Drăghia, D.D.: *Continuitate în Algebre Banach*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1995.
4. Dunford, N.; Schwartz, J.T.: *Linear Operators, Part I : General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1958.
5. Farkas, W.; Pavel, L.: *Analiză funcțională. Exerciții şi probleme*, Editura Universității din Bucureşti, 1994.
6. Foiaş, C.; Grigore, Gh.: *Teste de Analiză funcțională*, Editura Universității din Bucureşti, 1975.
7. Pavel, L.: *An Introduction to Functional Analysis*, Editura Universității din Bucureşti, 2000.
8. Rudin, W.: *Analiză reală şi complexă*, Editura Theta, Bucureşti, 1999.